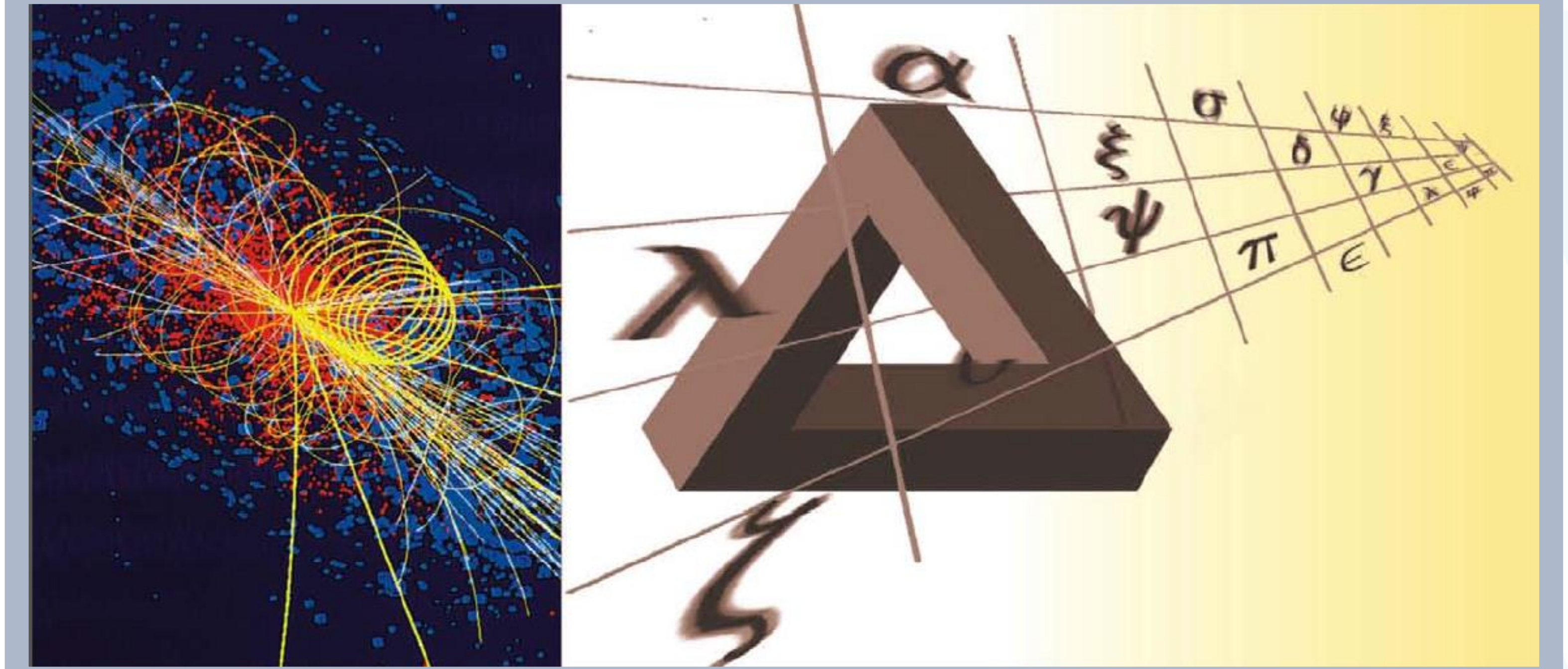
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الميكاترونكس

مقرر التحليل العددي

Numerical Differentiation/Integration



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2023-2024

Contents

Numerical Differentiation

الهدف الرئيسي من التفاضل العددي هو ايجاد قيم التفاضلات التي يصعب الحصول عليها بالطرق التحليلية

نفرض ان $y = f(x)$ دالة معطاة قيمها في جدول كما يلي:

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

الفكرة هنا هي أنه إذا كان عدد نقاط البيانات هو n فإنه يمكننا إيجاد دالة من الدرجة n−1 تستوفي هذه البيانات،

وهذه الدالة يمكن أن تكون على الصورة: $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

ثم نقوم بتفاضل المعادلة لتمثل تفاضل مجموعة النقاط المعطاة.

Example

جد القيمة التقريبية لـ $f'(0.12)$ باستخدام النقاط المبينة في الجدول التالي:

x	0.05	0.10	0.20	0.26
$f(x)$	0.05	0.0999	0.1987	0.2571

$$f(x) \approx P_3(x) = 0.05\frac{(x-0.10)(x-0.20)(x-0.26)}{(0.05-0.10)(0.05-0.20)(0.05-0.26)}$$

$$+0.0999\frac{(x-0.05)(x-0.20)(x-0.26)}{(0.10-0.05)(0.10-0.20)(0.10-0.26)} + 0.1987\frac{(x-0.05)(x-0.10)(x-0.26)}{(0.20-0.05)(0.20-0.10)(0.20-0.26)}$$

$$+0.2571\frac{(x-0.05)(x-0.10)(x-0.26)}{(0.26-0.05)(0.26-0.10)(0.26-0.20)}$$

$$f(x) = -0.119x^3 - 0.025x^2 + 1.004x$$

$$f'(x) = -0.357x^2 - 0.05x + 1.004$$

$$f'(0.12) \simeq 0.993$$

```
clc
clear
x = [0.05 0.1 0.20 0.26];
y = [0.05 0.0999 0.1987 0.2571];
N = length(x)-1;
l = 0;
for m = 1:N + 1
   P = 1;
   for k = 1:N + 1
      if k ~= m
         P = conv(P,[1 -x(k)])/(x(m)-x(k));
      end
   end
   l = l + y(m)*P;
end
F=polyder(l);
polyval(F,0.12)

      0.9927
```

يوجد فى ماتلاب دالة جاهزة البناء لحساب الفرق بين كل نقطتين متتاليتين على أى مجموعة بيانات مدخلة. هذه الدالة هى:

y=diff(x)

حيث تقوم هذه الدالة بحساب الفرق بين كل نقطتين متتاليتين فى المتجه x. كمثال على ذلك سنحسب الفروق بين مربعات الأرقام من ١ إلى ١٠ كما يلى:

x=(1:10).^2

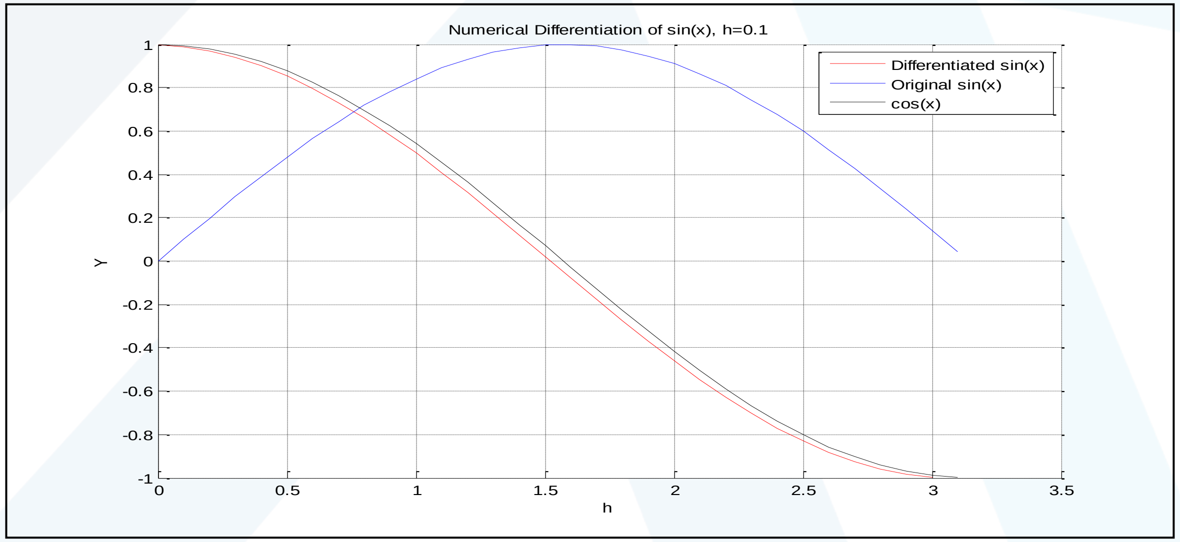
```
x =
     1     4     9    16    25    36    49    64    81   100
```

y=diff(x)

```
y =
     3     5     7     9    11    13    15    17    19
```

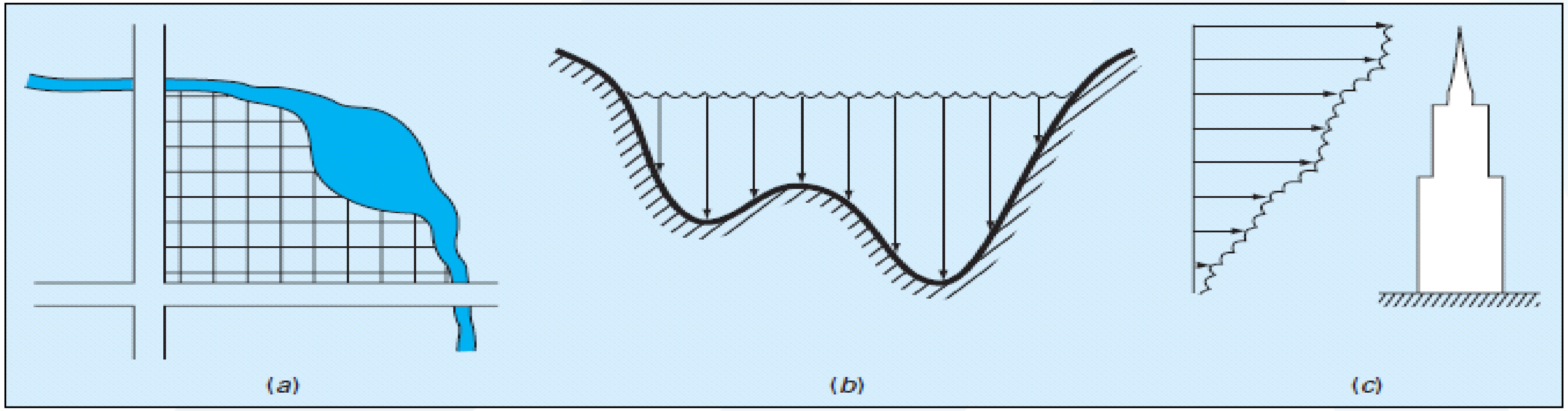
يمكن توضيح ذلك أكثر بمثال نقوم فيه بتفاضل الدالة $f(x)=\sin(x)$ عن طريق تقسيم الدالة $f(x)$ إلى نقاط متساوية البعد بين كل منها هو $h=0.1$، ثم نجرى دالة الفرق ونقسم هذه الفروق على المسافة بين كل نقطتين (h) فنحصل على تفاضل الدالة $f(x)$، ثم نقارن التفاضل الرقمى الناتج مع التفاضل التحليلى للدالة $f(x)=\sin(x)$ وهو $\cos(x)$ عن طريق رسم كل منهما مع x.

```
h = 0.1;
x = 0:h:pi;
m=length(x)-1;
y=diff(sin(x))/h;
y1=sin(x);
y2=cos(x);
hold on;
plot(x(1,1:m),y,'r');
plot(x,y1 ,'b');
plot(x,y2 ,'k');
grid
legend('Differentiated sin(x)','Original sin(x)', 'cos(x)')
hold off
```

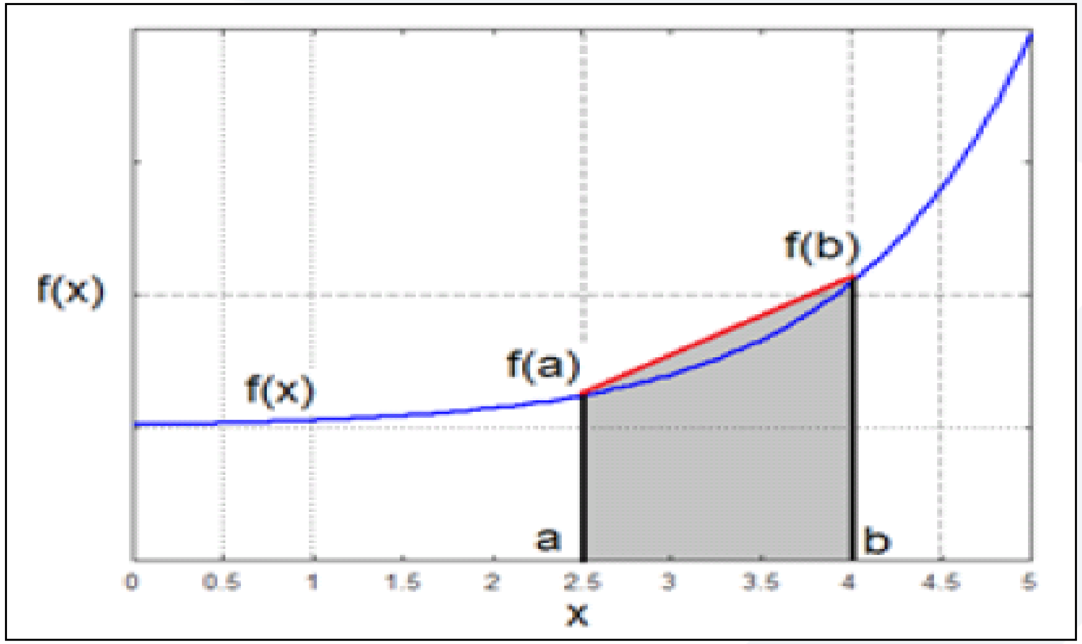


Numerical Integration

التكامل العددي هو الأكثر شيوعا والأكثر استخداما نتيجة استخدامه فى الحياة العملية فى الكثير من التطبيقات. يبين الشكل ثلاثة من هذه التطبيقات حيث فى الشكل الأول يتم استخدام التكامل العددي لحساب مجموع القوى المؤثرة على ناطحة سحاب نتيجة الرياح المؤثرة عليها من قاعدتها حتى قمتها حيث يكون تأثير هذه القوة أكبر ما يمكن عند قمة الناطحة. فى الشكل الثاني يمكن استخدام التكامل العددي أيضا فى حساب مساحة مقطع أحد الأشكال التى من الصعب حسابها باستخدام طرق التكامل التحليلية. فى الشكل الثالث يمكن أيضا استخدام التكامل العددي فى حساب مساحة قطعة أرض غير منتظمة الحدود كما فى الشكل، وأيضا من الصعب جدا استخدام الطرق التحليلية فى هذا التكامل. معنى ذلك أنه من المنطقى أن يكون استخدام التكامل العددي فى التطبيقات التى يصعب فيها الحصول على تكامل تحليلى، مما يعنى أن التكامل الذى سنحصل عليه بالطرق العددية سيكون تقريبى وستكون به نسبة خطأ تختلف من طريقة لأخرى.



طريقة شبه المنحرف trapezoid للتكامل

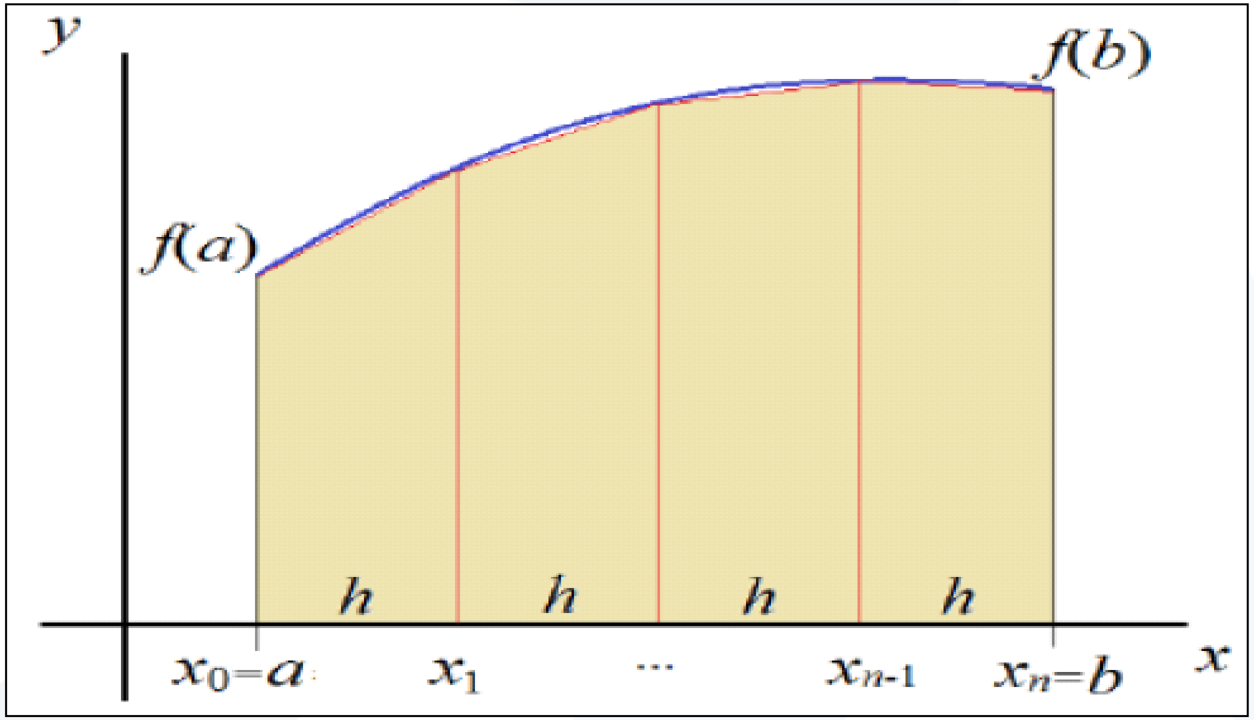


في هذه الطريقة يتم استيفاء الدالة f(x) بين النقطتين a و b بخط مستقيم يمر بقيمتي الدالة عند هاتين النقطتين f(a) و f(b) كما هو موضح لذلك فإن الاستيفاء هنا يكون من الدرجة الأولى. هذا الخط المستقيم الناتج يكون شبه منحرف قاعدته هي h=b-a وجانبيه هما f(a) و f(b) ولذلك يمكن كتابة مساحة شبه المنحرف الناتج حاصل ضرب القاعدة في متوسط الجانبين

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\left[\frac{f(b)+f(a)}{2}\right]$$

طريقة شبه المنحرف المركب composite trapezoid للتكامل

لزيادة دقة التكامل بطريقة شبه المنحرف يمكن تقسيم المدى [a b] إلى عدد n من المقاطع وحساب مساحة شبه المنحرف الممثل لكل مقطع:



المساحة في اول جزء هي :

$$A=h[f(x0)+f(x1)]/2$$

سيكون التكامل مساويًا لمجموع المناطق في trapezoidal areas :

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

So,

$$I = h\left\{\frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right\}$$

or

$$I = h\left\{\frac{1}{2}[f(x_a) + f(x_b)] + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right\}$$

والتي يمكن برمجتها في حلقة واحدة. نظرًا لأن حجم الخطوة ، h ، ثابت

Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$ (analytical integration value is 1) : اوجد قيمة التكامل

```
f = inline('x*sin(x)');
a = 0;
b = pi/2;
n = 5;
h = (b-a)/n ;
S = 0.5*(f(a)+f(b));
for i = 1:n-1
   S = S + f(a + i*h);
end
Intg = h * S;
disp('The value of integral:')
disp(Intg)
```

```
The value of integral:
    1.0083
```

Example

الجدول التالي يبين العلاقة بين الزمن و السرعة لروبوت يتحرك بمسار مستقيم و المبين بالشكل:

الزمن [s]	0	0.2	0.4	0.6
السرعة [m/s]	0	0.35	0.45	0.48

احسب المسافة المقطوعة بعد 0.6 ثانية بدءاً من لحظة الانطلاق باستخدام طريقة شبه المنحرف المركب composite trapezoid

في هذه الحالة ستكون المسافة هي تكامل السرعة في الفترة من 0 إلى 0.6 كما يلي:

$$distance = \int_0^{0.6} v\,dt$$

الحل العددي باستخدام قانون شبه المنحرف المركب حيث الفترة الزمنية من 0 إلى 0.6 مقسمة إلى ثلاث مقاطع

$$D = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_n)] + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right\}$$

$$D = \frac{0.6-0}{3}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3)\right)$$

$$D = 0.2 * \left(\frac{1}{2}0 + 0.35 + 0.45 + \frac{1}{2}0.48\right) = 0.208[m]$$

انتهت المحاضرة