جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 15

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

التابعان الأسي واللوغاريتمي

التابع الأسي Exponential Function

صيغة أولر Euler's Formula

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{z} = e^{x} \cos y + i e^{x} \sin y$$

خواص التابع الأسي

$$\frac{d}{dz} e^{z} = e^{z}$$

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad , \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

$$e^{z + 2\pi i} = e^{z}$$

تابع دوري، دوره $2\pi i$

الشكل القطبي للعدد العقدي Polar Form of a Complex Number

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$$

التابع اللوغاريتمي العقدي Complex Logarithmic Function

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n) \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

مثال: أوجد قيمة $\ln(-2) , \ln(-1-i)$

الحل

- $\ln(-2)$

$$\theta = \pi \ , |-2| = 2 \Rightarrow \ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n) \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- $\ln(-1-i)$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} , |-1-i| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \ln(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Solving an Exponential Equation حل معادلة أسية

$$e^{z} = \sqrt{3}+i \quad , \quad z = ?$$

$$\Rightarrow z = \ln\left(\sqrt{3}+i\right) \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \ , \ \left|\sqrt{3}+i\right| = 2$$

$$z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right) ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Principal Value القيمة الأساسية

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\theta \ ; \ \theta = Arg(z)$$

مثال: أوجد القيمة الأساسية لـ $\ln(i)$, $\ln(-2)$، و $\ln(\sqrt{3}+i)$

الحل

$$\mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i\pi \qquad \mathrm{Ln}(i) = i\frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}$$

تابع القوة العقدية Complex Power Function

$$f(z)=z^{\alpha}=e^{\alpha \ln z} \quad ; \; z \neq 0$$

مثال: أوجد قيمة i^{2i}

الحل

$$i^{2i}=e^{2i.\ln(i)}$$

$$=e^{2i(\ln 1+i(\pi/2+2\pi n))}=e^{-2(\pi/2+2\pi n)} \quad ; n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

ملاحظة لحساب القيمة الأساسية لـ $f(z)=z^{\alpha}$ نستخدم Lnz بدلاً من lnz .

Trigonometric Functions التوابع المثلثية

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ; \quad z = x + iy$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \, , \, \cot z = \frac{1}{\tan z} \, ,$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \, , \, \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

→ $\sin z \; , \cos z$ Unbounded غير محدودة

التوابع القطعية الزائدية Hyperbolic Functions

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \;,\; \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \;;\; z = x + iy$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \;,\; \coth z = \frac{1}{\tanh z} \;,$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \;,\; \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

تمارين

1 حل المعادلتين الآتيتين

- $e^{1/z} = -1$
- $e^z = 4i$

الحل

- $e^z = 4i$

$$z = \ln(4i) = \log_e 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.3863 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$$

- $e^{1/z} = -1$

$$\frac{1}{z} = \ln(-1) = \log_e 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i \Rightarrow z = -\frac{i}{(2n+1)\pi}$$

2 اكتب $\ln z$ بالشكل $a + ib$

- $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$
- $z = -2 + 2i$

الحل

تمارين

- $z = -2 + 2i$

$$\ln(-2+2i) = \log_e 2\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) = 1.0397 + \left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)i$$

- $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$

$$\ln(\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i) = \log_e 2\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = 1.0397 + \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)i$$

3 أوجد القيمة الأساسية للوغاريتم العددين الآتيين

- $z = (1+i)^4$
- $z = 6 - 6i$

الحل

- $z = 6 - 6i$

$$\mathrm{Ln}(6-6i) = \log_e 6\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.1383 - \frac{\pi}{4}\,i$$

تمارين

4 أوجد جميع قيم ما يلي

- $z = (1+i)^4$

$$\mathrm{Ln}(1+i)^4 = \mathrm{Ln}(-4) = \log_e 4 + \pi i = 1.3863 + \pi i$$

- $(1+i)^{(1+i)}$
- $(-i)^{4i}$

الحل

- $(-i)^{4i}$

$$(-i)^{4i} = e^{4i\ln(-i)} = e^{4i[\log_e 1 + i(-\frac{\pi}{2}+2n\pi)]} = e^{(2-8n)\pi}$$

- $(1+i)^{(1+i)}$

$$(1+i)^{(1+i)} = e^{(1+i)\ln(1+i)} = e^{(1+i)[\log_e \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)]}$$

$$= e^{\log_e \sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\log_e\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\log_e\sqrt{2}\right)\right] = e^{-2n\pi}[0.2740 + 0.5837i]$$

تمارين

5 أوجد القيمة الأساسية للعدد $(-1)^{(-2i/\pi)}$

الحل

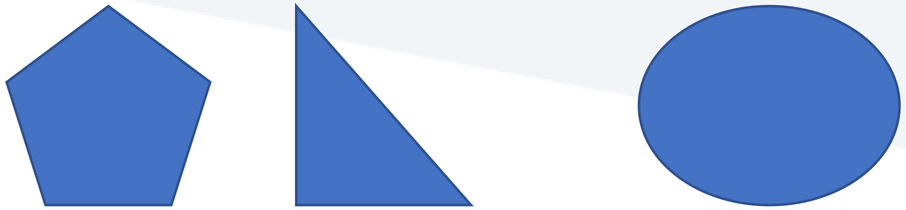
$$(-1)^{-\frac{2i}{\pi}} = e^{-\frac{2i}{\pi}\mathrm{Ln}(-1)} = e^{-\frac{2i}{\pi}(\pi i)} = e^{2} = 7.3891$$

التكامل في المستوي العقدي

Integration in the Complex Plane

تعريف: المنطقة بسيطة الاتصال:

هي المنطقة التي تتحدد تماماً بمنحني بسيط مغلق واحد.



تعريف: المنطقة متعددة الاتصال:

هي المنطقة التي تتحدد تماماً بمنحنيين بسيطين مغلقين على الأقل، أي تحوي ثقوب.

التكامل على منحن Contour Integral

إذا كان $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ قابل للمكاملة على المنحني C، عندئذ فإن:

$$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy)$$

إذا كان المنحني معطى وسيطياً

$$C: z(t)=x(t)+iy(t)\ ;\ a\le t\le b$$

$$\int_C f(z).dz=\int_a^b f(z(t)).z'(t).dt$$

المعادلات الوسيطية لبعض المنحنيات

المستقيم

$$C : z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \quad ; -\infty < t < \infty$$

القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين

$$C : z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \quad ; 0 \le t \le 1$$

الدائرة

$$C : z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t) \quad ; 0 \le t \le 2\pi$$

$$C : z(t) = z_0 + re^{it} \quad ; 0 \le t \le 2\pi$$

مثال: احسب قيمة التكامل الآتي

$$\int_C \bar{z}\,dz \quad ; C : x(t) = 3t \ , y(t) = t^2 \quad ; -1 \le t \le 4$$

الحل

$$z(t) = 3t + it^2 \quad ; -1 \le t \le 4$$

$$\Rightarrow z'(t) = 3 + 2it \quad , f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-1}^{4} (3t - it^2)(3 + 2it)\,dt = 195 + 65i$$

مثال: احسب قيمة التكامل الآتي

$$\oint_C \frac{1}{z}.dz \quad ; C : x(t) = \cos t \ , \ y(t) = \sin t \ ; 0 \le t \le 2\pi$$

الحل

$$z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it} \ ; 0 \le t \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \ z'(t) = ie^{it} \ , \ f(z(t)) = e^{-it}$$

$$\oint_C \frac{1}{z}.dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}.ie^{it} dt = 2\pi i$$

Properties of Contour Integral خواص التكامل على منحن

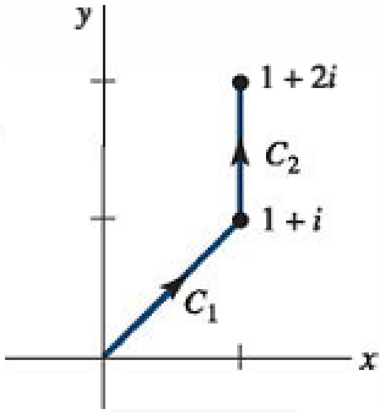
$$\int_C k.f(z).dz = k.\int_C f(z).dz$$

$$\int_C [f(z)+g(z)].dz = \int_C f(z).dz + \int_C g(z).dz$$

$$\int_C f(z).dz = \int_{C_1} f(z).dz + \int_{C_2} f(z).dz$$

$$\int_{-C} f(z).dz = -\int_C f(z).dz$$

مثال: احسب قيمة التكامل الآتي حيث المنحني معطى بالشكل المرافق



الحل

$$\int_C \left(x^2 + iy^2\right).dz$$

$$\int_C \left(x^2 + iy^2\right).dz = \int_{C_1} \left(x^2 + iy^2\right).dz + \int_{C_2} \left(x^2 + iy^2\right).dz$$

$$C_1 : y = x \Rightarrow z(x) = x + ix \;\; ; 0 \le x \le 1 \Rightarrow z'(x) = 1 + i$$

$$C_2 : x = 1 \Rightarrow z(y) = 1 + iy \;\; ; 1 \le y \le 2 \Rightarrow z'(y) = i$$

$$\int_C \left(x^2 + iy^2\right).dz = \int_0^1 \left(x^2 + ix^2\right)(1 + i)dx + \int_1^2 \left(1 + iy^2\right)(i)dy = \frac{-7}{3} + \frac{5}{3}i$$

تمارين

1 احسب التكاملين الآتيين

- $\int_C (2\bar{z} - z)\,dz$ $C \quad x = -t, y = t^2 + 2, 0 \le t \le 2$
- $\int_C \frac{1+z}{z}\,dz$ حيث المنحني C هو النصف الأيمن للدائرة الواصل بين النقطتين $z = -i$ و $z = i$.

الحل

- $\int_C (2\bar{z} - z)\,dz$

$$\int_C (2\bar{z} - z)\,dz = \int_0^2 [-t - 3(t^2+2)i](-1+2ti)\,dt = \int_0^2 (6t^3 + 13t)\,dt + i\int_0^2 (t^2+2)\,dt = 50 + \frac{20}{3}i$$

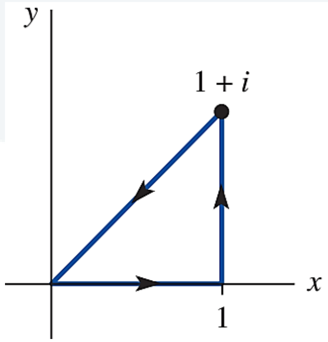
- $\int_C \frac{1+z}{z}\,dz$ لدينا المعادلة الوسيطية للمنحني المعطى $z = e^{it}, -\pi/2 \le t \le \pi/2$

بالتالي $dz = ie^{it}\,dt$

$$\Rightarrow \int_C \frac{1+z}{z}\,dz = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+e^{it})\,dt = (2+\pi)i$$

تمارين

2 احسب التكامل $\oint_C (2z-1)\,dz$ على المنحني المعطى بالشكل المرافق



الحل

نجزئ المنحني المعطى إلى ثلاثة منحنيات

$$\oint_C (2z-1)\,dz = \int_{C_1} (2z-1)\,dz + \int_{C_2} (2z-1)\,dz + \int_{C_3} (2z-1)\,dz$$

$C_1,\ y=0,\ 0\le x\le 1,\ z=x,\ dz=dx,$ $\Rightarrow$ $\int_{C_1} (2z-1)\,dz = \int_0^1 (2x-1)\,dx = 0$

$C_2,\ x=1,\ 0\le y\le 1,\ z=1+iy,\ dz=i\,dy$ $\Rightarrow$ $\int_{C_2} (2z-1)\,dz = -2\int_0^1 y\,dy + i\int_0^1 dy = -1+i$

$C_3,\ y=x,\ z=x+ix,\ dz=(1+i)\,dx$ $\Rightarrow$ $\int_{C_3} (2z-1)\,dz = (1+i)\int_1^0 (2x-1+2ix)\,dx = 1-i$

$$\oint_C (2z-1)\,dz = 0-1+i+1-i = 0$$