

تمارين محلولة 1

1. أثبت أنه إذا كان $r \in \mathbb{Q}$ ، وكان $x \notin \mathbb{Q}$ ، فإن $r + x \notin \mathbb{Q}$ ، وإذا كان $r \neq 0$ ، فإن $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
الحل: ليكن $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ و $x \notin \mathbb{Q}$ عندئذ بنقض الفرض، لنفرض جـدلاً أن $r + x \in \mathbb{Q}$ وبذلك يوجد عدنان صحيحان \dot{p} و \dot{q} ، بحيث $r + x = \frac{\dot{p}}{\dot{q}}$ ، ومنه $x = \frac{\dot{p}}{\dot{q}} - \frac{p}{q} = \frac{q\dot{p} - p\dot{q}}{\dot{q}q}$ وبالتالي $x \in \mathbb{Q}$ وهذا تناقض مع الفرض، الأمر الذي يعني أن فرضنا خاطئ، وعكسه هو الصحيح.
بالطريقة نفسها: إذا كان $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ ، يكون $r \cdot x = \frac{\dot{p}}{\dot{q}}$ ، وعليه $x = \frac{\dot{p}}{\dot{q}} \cdot \frac{1}{r}$ ، وهذا تناقض.

2. أثبت أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. من أجل الحل، استعن باستراتيجية التناقض.

3. استنتج أنه بين أي عددين عاديّين، يوجد عدد غير عاديّ.
الحل: ليكن r, r' عددين عاديّين، بحيث $r < r'$. لنضع

$$x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r - r')$$

حيث $x \in]r, r'[$ من جهة لدينا $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r - r')$

وعليه $x \notin \mathbb{Q}$ ، وبهذا استطعنا إيجاد عدد عاديّ بين عددين غير عاديّين.
وبناء على التمرينين (1) و (2)، فإن $\frac{\sqrt{2}}{2}(r - r')$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد العاديّة،

4. بين أن $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ عدد غير عاديّ. مساعدة: برهن ذلك عن طرق التناقض.

5. بين أن $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ و

$$\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

ثم أوجد صيغة لـ $\max(x, y, z)$

الحل: إذا كان $x - y \leq 0$ عندئذ $|x - y| = -x + y$ ، وعليه يكون

$x - y \geq 0$ بالشكل نفسه عندما يكون $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = y$
عندئذ $|x - y| = x - y$ وعليه

$$\frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$$

أما بالنسبة إلى ثلاثة أعداد حقيقية :

$$\max(\max(x, y), z)$$

بناءً على الصيغة السابقة يكون :

$$\max(x, y, z) = \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2}$$

$$\max(x, y, z) = \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}$$

6. لتكن لدينا المجموعتان A, B المحدودتان من الأعداد الحقيقية، لنعرف : $A + B = \{a + b; (a, b) \in A \times B\}$

a. أثبت أن $\sup(A + B)$ تمثل حداً أعلى للمجموعة $A + B$

b. أثبت أن $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

الحل :

a. نعلم أن $\sup A$ يمثل حداً أعلى لـ A , هذا يعني أن $\forall a \in A, a \leq \sup A$ كذلك الأمر $\forall b \in B, b \leq \sup B$ سنبين أن

$\sup A + \sup B$ يمثل حداً أعلى لـ $A + B$. لنأخذ عنصراً كيفياً من المجموعة $A + B$, وبذلك يكتب بالشكل $x = a + b; a \in A, b \in B$ بما أن $a \leq \sup A$ و $b \leq \sup B$ هذا يعني أن

$x = a + b \leq \sup A + \sup B$, وبما أن x كيفي من المجموعة $A + B$, فإن $\sup A + \sup B$ يمثل حداً أعلى للمجموعة $A + B$.

b. بدايةً سنبين أنه من أجل كل $\varepsilon > 0, \sup A + \sup B - \varepsilon$, لا يمثل حداً أعلى للمجموعة $A + B$.
لنأخذ إذاً $\varepsilon > 0$ كيفي، ولنبين أن

$\sup A + \sup B - \varepsilon$ ، لا يحدّ المجموعة $A + B$ من الأعلى. بما أنّ $\sup A$ أصغر حدّ أعلى لـ A ، فإنّ

$\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ ، ليست حدّاً أعلى لـ A . هذا يعني أنّه يوجد $a \in A$ ، بحيث $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$.

(تنبيه: $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ ليس بالضرورة عنصر من A). بالطريقة نفسها، يوجد $b \in B$ ، بحيث $b >$

$\sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. إذاً $x = a + b \in (A + B)$ كذلك $x > a + \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + b + \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$ أي $x > \sup A + \sup B - \varepsilon$ ،

وهذا يعني أنّنا استطعنا إيجاد عنصر من المجموعة $A + B$ أكبر من $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ، وعليه

$\sup A + \sup B - \varepsilon$ ، لا يمثّل حدّاً أعلى للمجموعة وفقاً لتعريف الحدّ الأعلى.

c. من الجزء الأوّل للبرهان لدينا $\sup A + \sup B$. تمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $A + B$ ، كما أنّه وفقاً للجزء

الثاني حينما أخذنا ε كيفيّاً موجّباً، تبين أنّ $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ، ليس حدّاً أعلى لـ $(A + B)$ ، إذاً

$\sup A + \sup B$ حد أعلى أصغريّ للمجموعة. ومنه يكون

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B)$$

7. لتكن A, B مجموعتين محدودتين من الأعداد الحقيقية. صح أو خطأ؟

a. $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$

b. $A \subset B \implies \inf A \leq \inf B$

c. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$

d. $\sup A + B < \sup A + \sup B$

e. $\sup -A = -\inf A$

f. $\sup A + \inf B \leq \sup A + B$

الحلّ :

a. صحيح، b. خاطئ، c. صحيح، d. خاطئ، e. صحيح، f. صحيح.

تمارين غير محلولة

- (1) ليكن x و y عددين حقيقيين، أثبت أن $|x| \geq ||x + y| - |y||$.
- (2) ليكن $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ عدداً حقيقياً (n عدد طبيعي). أثبت أن

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$
- (3) ليكن x, y, n عددين حقيقيين. قارن بين $E(x + y)$ و $E(x) + E(y)$. ثم قارن بين $E(x \times y)$ و $E(x) \times E(y)$.
- (4) أثبت أن تقاطع المجالات يمثل مجالاً. هل هذه النتيجة تسري على اجتماع المجالات؟ أوجد الشرط اللازم، والكافي حتى يكون اجتماع المجالات مجالاً.
- (5) لتكن A مجموعة جزئية من \mathbb{R} ، ولنعرّف $-A = \{-x; x \in A\}$. أثبت أن $\min A = -\max -A$.
- (6) أوجد الحد الأعلى الأصغري والحد الأدنى الأعظمي لكل من المجموعات:
- a. $S = \left\{ x ; x = -\frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n^2; n \geq 1 \right\}$
- b. $S = \{x ; x^2 < 9\}$
- c. $S = \{x ; x^2 \leq 7\}$
- d. $S = \{x ; |2x + 1| < 5\}$
- e. $S = \left\{ x ; (x^2 + 1)^{-1} > \frac{1}{2} \right\}$
- (7) لتكن S و T مجموعتين غير خاليتين من الأعداد الحقيقية، ولنعرّف:

$$S + T = \{s + t; s \in S, t \in T\}$$
- a. أثبت أنه إذا كانت المجموعتان S و T محدودتين من الأعلى، يكون $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.
- b. أثبت أنه إذا كانت المجموعتان S و T محدودتين من الأدنى، يكون $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$.
- (8) تحقق مما يلي:
- a. من أجل أي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c يتحقق:

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$
- b. من أجل أي عددين حقيقيين a, b يتحقق:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ أو } b = 0$$
- (9) تحقق من صحة المتراجحات الآتية:
- a. إذا كان $a < b + \varepsilon$ لكل $\varepsilon > 0$ ، فإن $a \leq b$.

b. إذا كان $\varepsilon < |x|$ لكل $\varepsilon > 0$ ، فإنّ $x = 0$.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} ; a < b \text{ و } c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} ; a < b \text{ و } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

(10) حلّ المتراجحات الآتية :

a. $|8x - 1| < 2$ **b.** $|3x - 4| \geq 5$ **c.** $\frac{x}{1-x} \geq 1 ; x \neq 1$



جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY