مسائل النقل

د . م . أيمن حسن يوسف

مقدمة

مسألة النقل هي نوع خاص من مسائل البرمجة الخطية والتي يتم فيها نقل السلع من مجموعة مصادر (sources) إلى مجموعة من الأهداف (destinations) وذلك بما يتناسب مع إمدادات هذه المصادر واحتياجات الأهداف، بحيث يتم تصغير الكلفة الكلية لعملية النقل.

تهدف مسألة النقل بشكل أساسي لإيجاد أفضل طريقة لتلبية مطالب عدد n من نقاط الطلب(demand points) باستخدام موارد عدد m من نقاط المصدر (supply point).

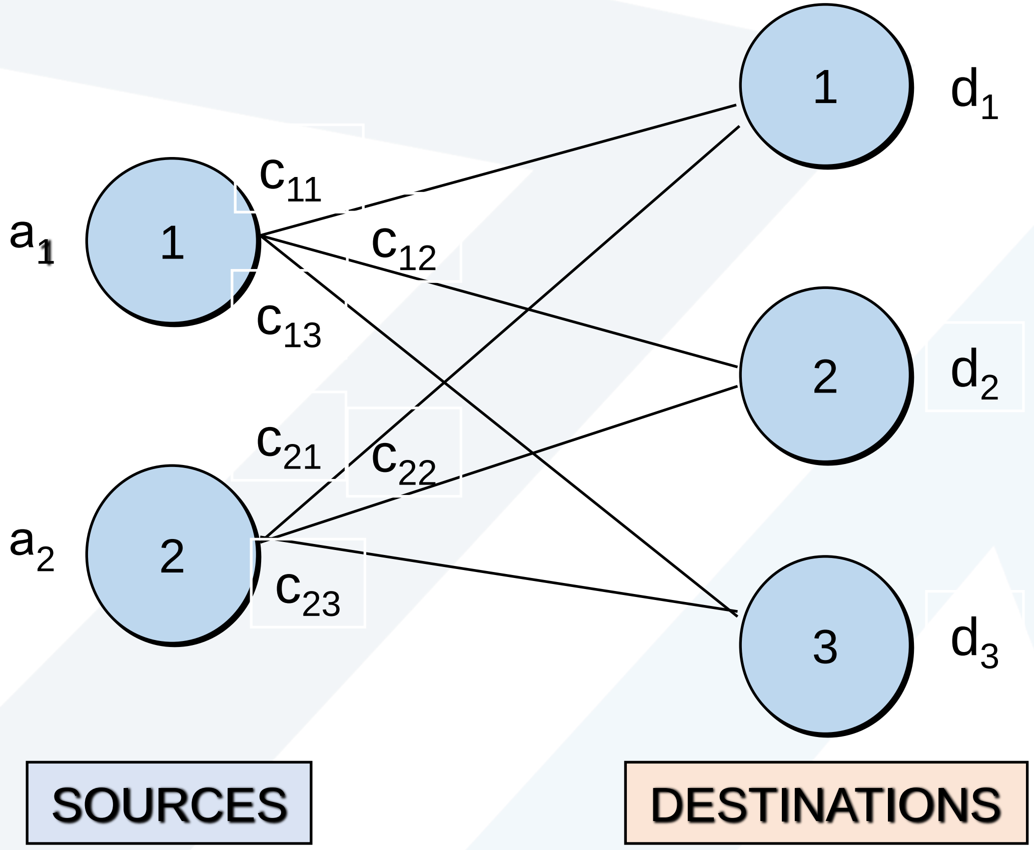
أثناء محاولة إيجاد أفضل طريقة للحل، يجب علينا الأخذ بعين الاعتبار متحول كلفة شحن[Cij] المنتج من نقطة المصدر[j] إلى نقطة الطلب[i] .

وصف وصياغة مشاكل النقل

تتعامل مشكلة النقل بشكل أساسي مع المسائل التي تهدف إلى إيجاد أفضل طريقة لتلبية الطلب من نقاط الطلب باستخدام قدرات نقاط الإمداد.

أثناء محاولة العثور على أفضل طريقة ، يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار التكلفة المتغيرة لشحن المنتج من نقطة التوريد إلى نقطة الطلب .

Transportation Problem



صياغة مسائل النقل

مثال (1):

تمتلك PowerCo ثلاثة محطات توليد للطاقة الكهربائية والتي تؤمن احتياجات الكهرباء لأربعة مدن.

يبين الجدول(1) كمية الكهرباء التي تؤمنها كل محطة توليد واحتياج كل مدينة من الكهرباء.

إن كلفة نقل مليون كيلو واط ساعي(1 million kwh) من الكهرباء من محطة توليد معينة لمدينة ما تتعلق بالمسافة التي يجب على الكهرباء أن تقطعها.

جدول النقل

تحدد مسألة النقل من خلال الموارد (supply) والطلب وتكاليف الشحن . لذلك فإن البيانات المتعلقة بالمسألة يمكن تلخيصها في جدول النقل (يعبر ضمنياً عن قيود الموارد والطلب وكلفة النقل بين كل نقطتي مصدروطلب)

Table 1. Shipping costs, Supply, and Demand for Powerco Example

From	*To*				
	City 1	*City 2*	*City 3*	*City 4*	*Supply (Million kwh)*
Plant 1	$8	$6	$10	$9	35
Plant 2	$9	$12	$13	$7	50
Plant 3	$14	$9	$16	$5	40
Demand (Million kwh)	45	20	30	30	

الحل

1) متحول القرار(Decision Variable):

بما أنه يجب علينا تحديد كمية الكهرباء المنقولة من كل محطة لكل مدينة:

Xij: كمية الكهرباء المنتجة في المحطة i والمرسلة للمدينة j .

X14: كمية الكهرباء المنتجة في المحطة 1 والمرسلة للمدينة 4.

2) التابع الهدف (Objective function):

بما أننا نريد تصغير الكلفة الكلية للشحن من المحطات للمدن:

$$\text{Minimize } Z = 8X_{11}+6X_{12}+10X_{13}+9X_{14}$$
$$+9X_{21}+12X_{22}+13X_{23}+7X_{24}$$
$$+14X_{31}+9X_{32}+16X_{33}+5X_{34}$$

3) قيود المصدر(Supply Constraints):

بما أن كل نقطة مصدر لها سعة انتاج محدودة يكون لدينا :

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \leq 35$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \leq 50$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} \leq 40$$

4) قيود الطلب (Demand Constraints):

بما أن كل نقطة مصدر لها سعة انتاج محدودة يكون لدينا :

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} \leq 45$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32} \leq 20$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33} \leq 30$$

$$X_{14}+X_{24}+X_{34} \leq 30$$

5) قيود الاشارة (شرط عدم السلبية):

بما أنه لا يمكن نقل الكمية السالبة من الكهرباء فإن كل Xij's يجب أن تكون موجبة :

$$Xij \geq 0 \ (i= 1,2,3;\ j= 1,2,3,4)$$

صياغة مسألة PowerCo في البرمجة الخطية

$$Min\ Z = 8X_{11}+6X_{12}+10X_{13}+9X_{14}+9X_{21}+12X_{22}+13X_{23}+7X_{24}$$
$$+14X_{31}+9X_{32}+16X_{33}+5X_{34}$$

S.T.: $X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \leq 35$ (Supply Constraints)

$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \leq 50$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} \leq 40$

$X_{11}+X_{21}+X_{31} \leq 45$ (Demand Constraints)

$X_{12}+X_{22}+X_{32} \leq 20$

$X_{13}+X_{23}+X_{33} \leq 30$

$X_{14}+X_{24}+X_{34} \leq 30$

$Xij \geq 0$ (i= 1,2,3; j= 1,2,3,4)

وصف عام لمسألة النقل

1) مجموعة من m نقطة مصدر تشحن منها البضائع .
نقطة المصدر i يمكنها تزويد الكمية Si من البضائع كحد أقصى .

2) مجموعة من n نقطة طلب يتم شحن البضائع إليها .
نقطة الطلب j يجب أن تستقبل الكمية dj من البضائع المشحونة على الأقل .

3) كل سلعة منتجة في نقطة المصدر i يتم نقلها لنقطة الطلب j يقابلها متحول الكلفة Cij .

Xij : عدد البضائع المنقولة من نقطة المصدر i لنقطة الطلب j .

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{j=n} X_{ij} \le s_i (i = 1,2,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} X_{ij} \ge d_j (j = 1,2,\dots,n)$$

$$X_{ij} \ge 0 (i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$$

مسألة النقل المتوازنة

إذا كانت الموارد الكلية مساوية للطلب الكلي ، نقول عن المسألة أنها متوازنة.

مسألة النقل المتوازنة :

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$

موازنة مسألة النقل إذا تجاوزت الموارد الكلية الطلب الكلي

إذا تجاوزت الموارد الكلية الطلب الكلي، يمكننا موازنة المسألة بإضافة نقطة طلب وهمية (dummy demand point).

بما أن الشحنات لنقطة الطلب الوهمية ليست حقيقية، فإنها تعطى كلفة صفرية.

موازنة مسألة النقل إذا كانت الموارد الكلية أقل من الطلب الكلي

إذا كانت الموارد الكلية في مسألة النقل أقل من الطلب الكلي عندها لن يكون هناك حل عملي لهذه المسألة.

لا يوجد شك أنه في هذه الحالة سيكون هناك طلب أو أكثر لن تتم تلبيته.

عموماً في مثل هذه الحالات يتم ربط كلفة جزائية (Penalty cost) مع كل طلب لم تتم تلبيته، طبعاً سيكون مرغوباً لنا جعل ال Penalty cost الكلية أصغرية.

إيجاد الحل الأساسي العملي (BFS) لمسألة النقل

على عكس مسائل البرمجة الخطية الأخرى، تعتبر مسألة النقل المتوازنة ذات m نقطة مصدر و n نقطة طلب أسهل حلاً.

على الرغم من أنها تمتلك m+n معادلة قيد، السبب في ذلك هو أنه إذا كانت مجموعة متحولات القرار (x_{ij}’s) تحقق كافة القيود ماعدا قيد واحد، فإن قيم (x_{ij}’s) ستحقق ذلك القيد المتبقي أوتوماتيكياً.

طرق إيجاد BFS لمسألة النقل المتوازنة

هناك ثلاثة طرق أساسيه :

1) طريقة الزاوية الشمالية الغربية (Northwest Corner Method).

2) طريقة التكلفة الأقل (Minimum Cost Method).

3) طريقة (فوجيل التقريبية) Vogel .

1) طريقة الزاوية العليا اليسارية

لإيجاد ال BFS باستخدام طريقة NWC :

- نبدأ بالزاوية العليا اليسرى من جدول النقل ونضع X_{11} بأكبر قيمة ممكنة (هنا نختار اكبر قيمة بين المتوفر والمطلوب تتحمله الخليةX_{11}) . قيمة X_{11} التي سنضعها لا يمكن أن تكون أكبر من أصغر قيمة بين هاتين القيمتين (المتوفر والمطلوب).

اعتماداً على الشرح السابق يمكننا وضع $X_{11}=3$ (يعني أن طلب نقطة الطلب 1 سيلبى من نقطة المصدر 1).

				5
				6
				2
3	5	2	3	

3				2
				6
				2
X	5	2	3	

بعد أن تحققنا من الخلايا اليمينية و السفلية ، نجد أنه يمكننا أن نذهب نحو اليمين (يعني نقطة المصدر 1 مازال بإمكانها تلبية طلبات أخرى) .

3	2			X
				6
				2
X	3	2	3	

3	2			X
	3			3
				2
X	X	2	3	

بعد تطبيق نفس الإجراء ، نجد أنه يمكننا الذهاب نحو الأسفل هذه المرة، (يعني نقطة الطلب 2 تحتاج إلى موارد أكثر من نقطة المصدر 2).

3	2			X
	3	2		1
				2
X	X	X	3	

3	2			X
	3	2	1	X
				2
X	X	X	2	

أخيراً، سيكون لدينا الحل الأساسي التالي:

$$x_{11}=3,\ x_{12}=2,\ x_{22}=3,\ x_{23}=2,\ x_{24}=1,\ x_{34}=2$$

3	2			×
	3	2	1	×
			2	×
×	×	×	×	

2) طريقة الكلفة الأصغرية

جَامعة المَنارة

إن طريقة الزاوية العليا اليسرى لا تستخدم تكاليف النقل.

يمكنها إعطاء الحل الأساسي العملي bfs بسهولة لكن كلفة النقل الكلية يمكن أن تكون عالية جداً. إن طريقة الكلفة الأصغرية تستخدم تكاليف الشحن من أجل الحصول على bfs مع كلفة نقل أصغرية.

لبدء طريقة الكلفة الأصغرية، نوجد أولاً متحول القرار ذو كلفة النقل الأصغرية X_{ij}. بعدها نعطي X_{ij} أكبر قيمة ممكنة له. والتي هي القيمة الأصغر ل S_i و d_j.

بعد ذلك، كما في طريقة الزاوية العليا اليسرى، يتوجب علينا شطب السطر i والعمود j وتقليل المورد أو الطلب للسطر أو العمود الغير مشطوبين بقيمة X_{ij} . بعدها سنختار الخلية ذات الكلفة الأصغرية للشحن من الخلايا التي لا تقع في السطر أو العمود المشطوبين، ثم نكرر الاجراء .

مثال عن طريقة الكلفة الأصغرية

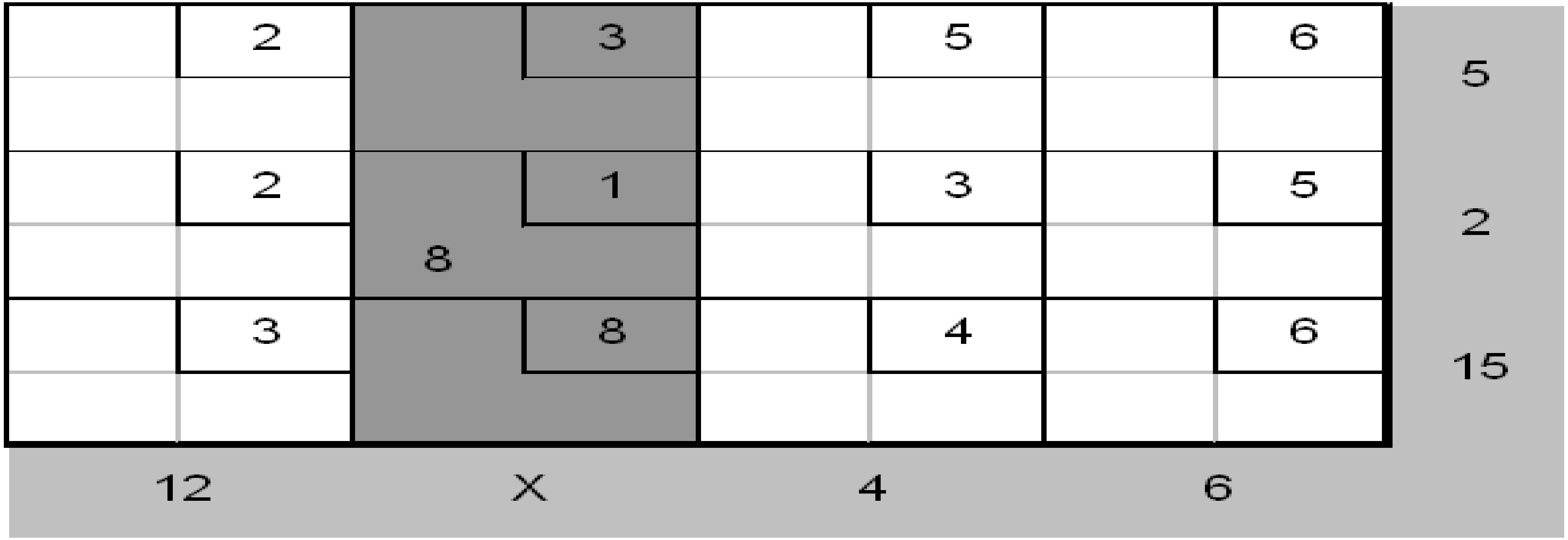
- خطوة (1) :
- n+m-1 وهو عدد المتغيرات في الجدول (عدد الأعمدة + عدد الأسطر – 1)
- 3+4-1=6

اختر الخلية ذات الكلفة الأصغر بالجدول:

2	3	5	6	5
2	1	3	5	10
3	8	4	6	15
12	8	4	6	

خطوة (2) :

اشطب العمود 2 :



جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

خطوة (3) :

أوجد الخلية الجديدة ذات كلفة النقل الأصغرية التالية واشطب السطر 2:

2	3	5	6	5
2 2	1 8	3	5	X
3	8	4	6	15
10	X	4	6	

خطوة (4) :

أوجد الخلية الجديدة ذات كلفة النقل الأصغرية واشطب السطر 1:

2 5	3	5	6	X
2 2	1 8	3	5	X
3	8	4	6	15
5	X	4	6	

خطوة (5):

أوجد الخلية الجديدة ذات كلفة النقل الأصغرية واشطب العمود 1:

2 / 5	3	5	6	X
2 / 2	1 / 8	3	5	X
3 / 5	8	4	6	10
X	X	4	6	

خطوة (6):

أوجد الخلية الجديدة ذات كلفة النقل الأصغرية واشطب العمود 3:

2 / 5	3	5	6	X
2 / 2	1 / 8	3	5	X
3 / 5	8	4 / 4	6	6
X	X	X	6	

خطوة (7) :

أخيراً أعط الخلية الأخيرة قيمة **6** .

تم إيجاد bfs : $X_{11}=5, X_{21}=2, X_{22}=8, X_{31}=5, X_{33}=4$ and $X_{34}=6$

2 5	3	5	6	X
2 2	1 8	3	5	X
3 5	8	4 4	6 6	X
X	X	X	X	

Min Z = 2*5+2*2+1*8+3*5+4*4+6*6

Min Z = 89

3) طريقة Vogel

نبدأ بحساب penalty لكل سطر و عمود .

ستكون penalty مساوية للفرق بين أصغر تكلفتي نقل في السطر أو العمود.

حدد السطر أو العمود ذو أكبر penalty .

أوجد أول متحول أساسي له أصغر تكلفة نقل في السطر أو العمود.

بعدها انسب أكبر قيمة ممكنة لهذا المتحول، واشطب السطر أو العمود كما في الطرق السابقة .

احسب penalties الجديدة واستخدم نفس الاجراء .

مثال عن طريقة Vogel

خطوة (1): حساب Penalties لكل سطر وعمود:

				Supply	Row Penalty
	6	7	8	10	7-6=1
	15	80	78	15	78-15=63
Demand	15	5	5		
Column Penalty	15-6=9	80-7=73	78-8=70		

خطوة (2) :

حدد أكبر **penalty** وانسب أكبر قيمة ممكنة للمتحول .

				Supply	Row Penalty
	6	7 5	8	5	8-6=2
	15	80	78	15	78-15=63
Demand	15	X	5		
Column Penalty	15-6=9	_	78-8=70		

خطوة (3) :

حدد أكبر **penalty** وانسب أكبر قيمة ممكنة للمتحول .

				Supply	Row Penalty
	6	7 5	8 5	0	_
	15	80	78	15	_
Demand	15	X	X		
Column Penalty	15-6=9	_	_		

خطوة (4) :

حدد أكبر **penalty** وانسب أكبر قيمة ممكنة للمتحول .

				Supply	Row Penalty
	6 0	7 5	8 5	X	_
	15	80	78	15	_
Demand	15	X	X		
Column Penalty	_	_	_		

خطوة (5):

أخيراً أوجدنا ال bfs :

$X_{11}=0$, $X_{12}=5$, $X_{13}=5$, and $X_{21}=15$

Min Z = 0*0+7*5+5*8+15*15

Min Z = 300

				Supply	Row Penalty
	cost 6, allocation 0	cost 7, allocation 5	cost 8, allocation 5		
	cost 15, allocation 15	cost 80	cost 78		
Demand	X	X	X		
Column Penalty	_	_	_		

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY