Duality Theory

الدكتور المهندس
أيمن حسن يوسف

Duality Theory

- إن لكل linear program problem مشكلة ثانوية مرتبطة معه (برنامج خطي آخر مرتبط معه)
- بحيث نسمي المشكلة الأساسية 'Primal'
- والمشكلة الثانوية المرتبطة بها تسمى 'Dual' .
- تكون المشكلة الأولى بتابع هدف Max وتكون الثانية بتابع هدف Min .
- متغيرات تابع الهدف لأحد المشكلتين هي right hand side لقيود المشكلة الأخرى .
- معادلات القيود لل primal تكون أصغر أو يساوي أما معادلات قيود Dual أكبر أو يساوي .
- متغيرات معادلات القيود للprimal هي عبارة عن مصفوفة A
- متغيرات معادلات القيود لل Dual هي عبارة عن منقول المصفوفة A

Duality Theory

Primal LP :

$$\text{Max} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots\dots x_j \ge 0, \dots\dots,\ x_n \ge 0.$$

Associated Dual LP :

$$\text{Min. } Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

subject to:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \dots\dots y_j \ge 0, \dots\dots,\ y_m \ge 0.$$

Duality Theory

The following are the *only* possible relationships between the primal and dual problems:

1. If one problem has *feasible solutions* and a *bounded* objective function (and so has an optimal solution), then so does the other problem, so both the weak and the strong duality properties are applicable
2. If one variable has *feasible solutions* but an *unbounded* objective function (no optimal solutions), then the other problem has *no feasible solutions*
3. If one variable has *no feasible solutions*, then the other problem either has *no feasible solutions* or an *unbounded* objective function

Duality Theory

➢ عادة نحل primal بطريقة simplex ثم نستنتج جدول simplex النهائي لل Dual حيث :

➢ Associated variables between primal and dual

	Primal		Dual	
(original variable)	x_j	⇔	y^s_{m+j}	(surplus variable)
(slack variable)	x^s_{n+i}	⇔	y_i	(original variable)

➢ Complementary slackness property:

When one variable in primal is basic,
its associated variable in dual is nonbasic

	Primal		Dual	
(m variables)	basic	⇔	nonbasic	(m variables)
(n variables)	nonbasic	⇔	basic	(n variables)

Example 1

Standard Algebraic Form

The Primal has:
2 variables and 3 constraints.
So the Dual has:
3 variables and 2 constraints

Primal

$$\text{Max } Z = 3x_1+5x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{s. to} & x_1 & & \le 4 \\ & & 2x_2 & \le 12 \\ & 3x_1+2x_2 & & \le 18 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

Dual

$$\text{Min } W = 4y_1+12y_2+18y_3$$

$$\begin{array}{llll} \text{s. to} & y_1 & +3y_3 & \ge 3 \\ & & 2y_2+2y_3 & \ge 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 & & \end{array}$$

Example 2

Standard Algebraic Form

Primal

$$\text{Max. } Z = 12x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

$$4x_1 + 7x_2 \leq 56$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$5x_1 + 4x_2 = 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المتراجحة من الشكل
≥ نضربها ب -1 حتى
نحولها إلى ≤

المساواة = تتحول إلى
متراجحتين واحدة ≥ نضربها
ب -1 لتحويلها والأخرى ≤

Primal in standard form

$$\text{Max. } Z = 12x_1 + 4x_2$$

Subject to constraints:

$$4x_1 + 7x_2 \leq 56$$

$$-2x_1 - 5x_2 \leq -20$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$-5x_1 - 4x_2 \leq -40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Example 2

Standard Algebraic Form

Dual

$$\text{Min. } Z' = 56y_1 - 20y_2 + 40y_3 - 40y_4$$

Subject to constraints:

$$4y_1 - 2y_2 + 5y_3 - 5y_4 \geq 12$$

$$7y_1 - 5y_2 + 4y_3 - 4y_4 \geq 4$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Example 3

Standard Algebraic Form

Primal

$$\text{Min.. } Z = 10x_1 + 15x_2$$

Subject to constraints:

$$5x_1 + 7x_2 \geq 80$$

$$6x_1 + 11x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$\text{Max.. } Z' = 80y_1 + 100y_2$$

Subject to constraints:

$$5y_1 + 6y_2 \leq 10$$

$$7y_1 + 11y_2 \leq 15$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Example 4

Standard Algebraic Form

Primal

$$Min..\ Z = 2x_2 + 5x_3$$

Subject to constraints:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

تحويل Min إلى
Max وبالعكس يكون
بضرب المعادلة ب -1

Primal in standard form :

$$Max..\ Z = -2x_2 - 5x_3$$

Subject to constraints:

$$-x_1 - x_2 \leq -2$$
$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Example 4
Standard Algebraic Form

Dual

$$\text{Min. } Z = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 4y_4$$

Subject to constraints:

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 0$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq -2$$

$$6y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq -5$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Relationships between Primal and Dual

- Weak duality property

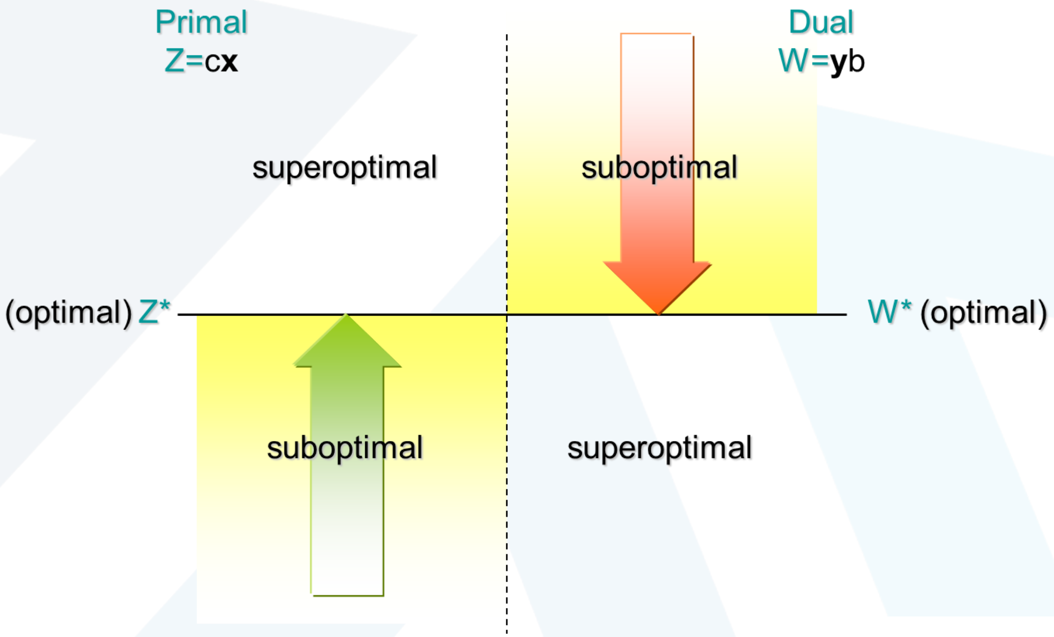
If **x** is a *feasible* solution to the primal, and **y** is a *feasible* solution to the dual, then

$$\mathbf{cx} \le \mathbf{y}b$$

- Strong duality property

If **x*** is an *optimal* solution to the primal, and **y*** is an *optimal* solution to the dual, then

$$\mathbf{cx^*} = \mathbf{y^*}b$$



Example of duality

نحل هذه المسائل بطريقة Simplex :

Max $Z = 3x_1+5x_2$

s. to

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1+2x_2 &\le 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	Ratio
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S1	0	1	0	1	0	0	4	∞
S2	0	0	2	0	1	0	12	6
S3	0	3	2	0	0	1	18	9

Example of duality

Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	ratio
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	
S1	0	1	0	1	0	0	4	4
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	∞
S3	0	3	0	0	-1	1	6	2

جدول حل الprimal problem

Basic variable	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Solution (right hand side)	ratio
Z	1	0	0	0	3/2	1	36	
S1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	
X1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	

Optimal solution

حل primal يكون كالتالي : (X1,X2,S1,S2,S3)=(2,6,2,0,0)

حل Dual يكون كالتالي : (y1,y2,y3,S1,S2)=(0,3/2,1,0,0)

وناتج تابع الهدف لكلا البرنامجين هو 36

فالحل مرئي لكلا البرنامجين ومتساوي فهو الحل الأمثل لهما

Example of duality

$$\text{Min } W = 4y_1+12y_2+18y_3$$

$$\text{s. to} \quad y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وجدول simplex لل Dual المرتبطة بالمثال :يكون بالشكل :

	Z	Y1	Y2	Y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	-4	-12	-18	0	0	-M	-M	0	
R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3	
R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5	

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Example of duality

	Z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	-4+M	-12+2M	-18+5M	-M	-M	0	0	8M	
R1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3	1
R2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5	2.5

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Example of duality

	Z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	2-2/3M	-12+2M	0	-6+2/3M	-M	6-5/3M	0	18+3M	
y3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1	∞
R2	0	-2/3	2	0	-2/3	-1	-2/3	1	3	3/2

Example of duality

	Z	y1	y2	y3	S1	S2	R1	R2	solution	ratio
Z	1	-2	0	0	-10+4/3M	-6	2-M	6-M	36	
y3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1	
y2	0	-1/3	1	0	-1/3	-1/2	-1/3	1/2	3/2	

Duality & sensitivity analysis

<u>ماذا يعني تحليل الحساسية ؟</u>

أي مراقبة مدى تأثير تغيير بارامترات البرنامج الخطي على أمثلية أو رؤية الحل .

البارامترات التي نجري عليها التغييرات هي : أمثال تابع الهدف c وأمثال معادلات القيود aij وright hand side لمعادلات القيود b .

Duality & sensitivity analysis

نقوم بتغيير البارامترات على المثال التالي :

Max Z = $3x_1+5x_2$

s. to

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1+2x_2 &\le 18 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Max Z = $4x_1 + 5x_2$

S. to

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 2x_1+2x_2 &\le 18 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	-4	-5	0	0	0	0	
S1	0	1	0	1	0	0	4	∞
S2	0	0	2	0	1	0	12	6
S3	0	2	2	0	0	1	18	9

Duality & sensitivity analysis

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	-4	0	0	5/2	0	30	
S1	0	1	0	1	0	0	4	4
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	∞
S3	0	2	0	0	-1	1	6	3

$C_B B^{-1}$

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution	ratio
Z	1	0	0	0	1/2	2	42	
S1	0	0	0	1	1/2	-1/2	1	
X2	0	0	1	0	1/2	0	6	
X1	0	1	0	0	-1/2	1/2	3	

B^{-1}

مازال الحل مرئياً وأمثلياً

Duality & sensitivity analysis

تغيير الright hand side لمعادلات القيود b يمكن حله بأسلوب بسيط وفق ما يلي :

Max Z = $4x_1 + 5x_2$

S. to

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Max Z = $4x_1 + 5x_2$

S. to

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 24 \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

لا يتغير الجدول بالكامل وإنما يتغير العمود الأخير فيه فقط ويكون كالتالي :

Duality & sensitivity analysis

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

$$C_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} b = 48$$

	Z	X1	X2	S1	S2	S3	solution
Z	1	0	0	0	1/2	2	48
S1	0	0	0	1	1/2	-1/2	7
X2	0	0	1	0	1/2	0	12
X1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-3

$$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

الحل لم يبقى مرئياً أو أمثلياُ وحتى يكون كذلك يجب تحقيق العلاقة التالية :

Duality & sensitivity analysis