المحاضرة الأولى

مقدمة في النظم المتقطعة زمنياً

د. نسمت أبو طبق

الفقرات الرئيسية:

مقدمة

تعاريف

تحويلات Z

خواص تحويلات Z

التكامل والتفاضل الرقمي

تحويل Z العكسي

مقدمة في النظم المتقطعة زمنياً

المقدمة:

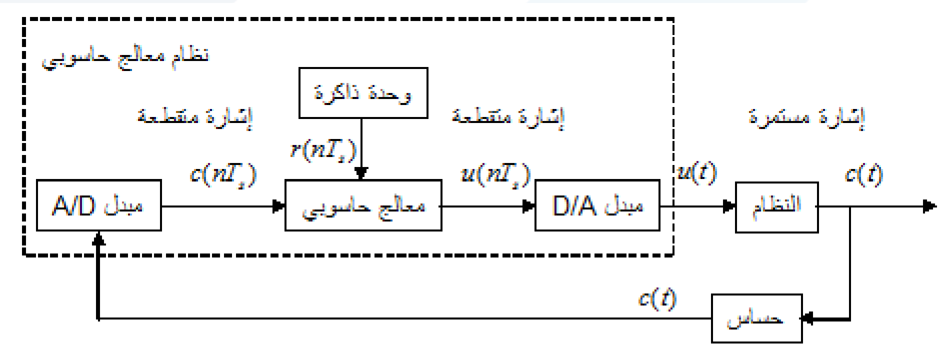
يعتبر الهدف الرئيسي من التحكم هو فرض سلوك معين مرغوب على نظام ما عن طريق استخدام تجهيزات تسمى المتحكمات. لتصميم المتحكمات طرق متعددة منها التحليلي ومنها التجريبي سنتطرق إليها في هذا المقرر تباعاً. لكن للوصول لمرحلة التصميم لابد أولا من التعرف على الأنظمة ومكوناتها ونماذجها وطرق ايجاد الاستجابة الزمنية لها.

مقارنة بين التحكم قديماً وحديثاً كما يلي:

قديماً: المتحكمات هي تجهيزات ميكانيكية أو هيدروليكية أو كهربائية أو إلكترونية.

حديثاً: بعد الثورة الرقمية والحاسوب تحولت المتحكمات إلى برامج حاسوبية تنفذ وفق خوارزميات محددة ضمن الحاسب للتحكم بالأنظمة رقمياً.

المخطط الصندوقي لنظام تحكم رقمي:

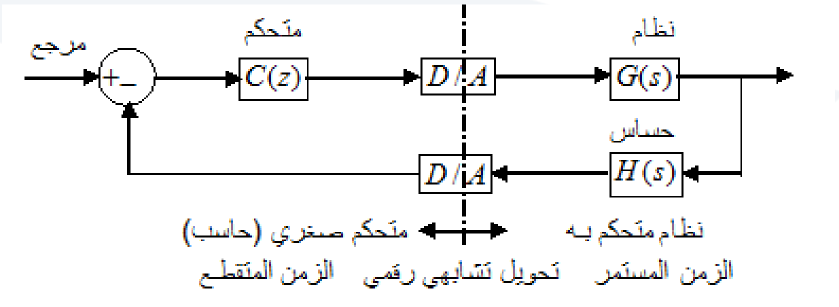


الشكل (1-1) المخطط الصندوقي لنظام تحكم رقمي

يقوم الحساس بقياس إشارة خرج النظام ويتم تحويل الخرج من مقدار فيزيائي (حرارة-حركة) إلى مقدار كهربائي (جهد أو تيار) وتكون هذه الإشارة مستمرة زمنياً. يتم بعد ذلك إرسال إشارة القياس إلى الحاسب وبما أن الحاسب لا يتعامل مع إشارات مستمرة بل متقطعة لذلك نحتاج لتقطيع إشارة الخرج زمنياً بواسطة المبدل A/D تماثلي (A) رقمي(D) تدخل هذه البيانات إلى برنامج حاسوبي مخزن في الذاكرة يقوم بمعالجة هذه البيانات. يقوم البرنامج بمقارنة الخرج مع الإشارة المرجعية في كل خطوة تقطيع وينتج الخرج المناسب (إشارة التحكم المتقطعة). يتم تحويل إشارة التحكم المتقطعة إلى إشارة مستمرة تطبق على دخل النظام الذي لا يتعامل إلا مع إشارات مستمرة زمنياً.

المخطط الصندوقي المبسط:

يبين الشكل (1-2) تقسيم المخطط إلى قسمين قسم مستمر زمنياً هو النظام مع الحساس حيث تكون الإشارة تماثلية. وقسم متقطع زمنياً وهو الحاسب حيث الإشارة رقمية. والربط البيني وهي مبدلات الإشارة رقمية/تماثلية.



الشكل (1-2) المخطط الصندوقي المبسط لنظام تحكم رقمي

في الشكل (1-2) رمزان (s) متحول لابلاس وهو تعبير رياضي عن الزمن المستمر و (z) وهو متحول Z وهو تعبير رياضي عن الزمن المتقطع.

ميزات ومساوئ التحكم الرقمي:

الميزات:

سهولة تصميم المتحكمات المعقدة وتعديلها.

سهولة التطبيق العملي.

تشغيل خوارزميات التحكم دون الحاجة لأجهزة تماثلية.

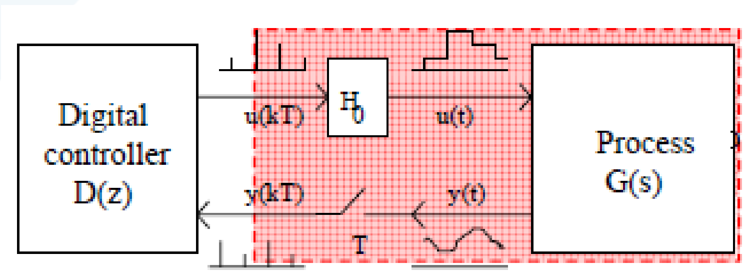
غير حساس لإشارات الطفيلية كتغير درجة الحرارة والتقادم.

العيوب:

النتائج تتعلق باختيار خطوة التقطيع.

مخطط تبديل الإشارة:

في الشكل (1-3) لتحويل الخرج $y(t)$ من إشارة مستمرة زمنياً إلى متقطعة يتم استخدام مقطع بعمل بتردد ثابت وبفاصل زمني T. لتحويل إشارة التحكم الرقمية إلى تماثلية يتم استخدام الماسك الصفري H_0 حيث يثبت الإشارة على قيمة معينة خلال خطوة التقطيع.

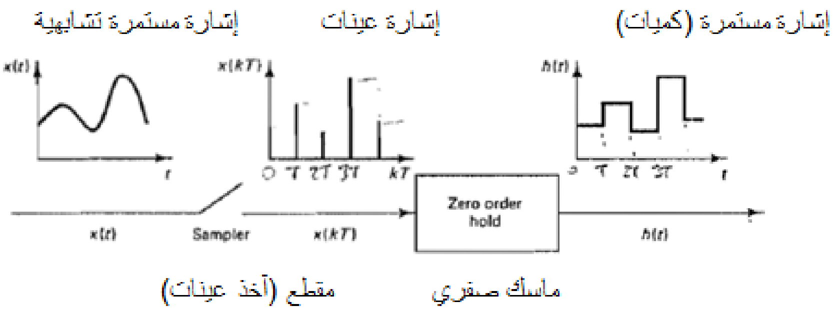


الشكل (1-3) مخطط تبديل الإشارة

المبدلات:

من تماثلي إلى رقمي: مرمز أو آخذ عينات يحول الإشارة المستمرة زمنياً إلى رقمية مرمزة بلغة الآلة.

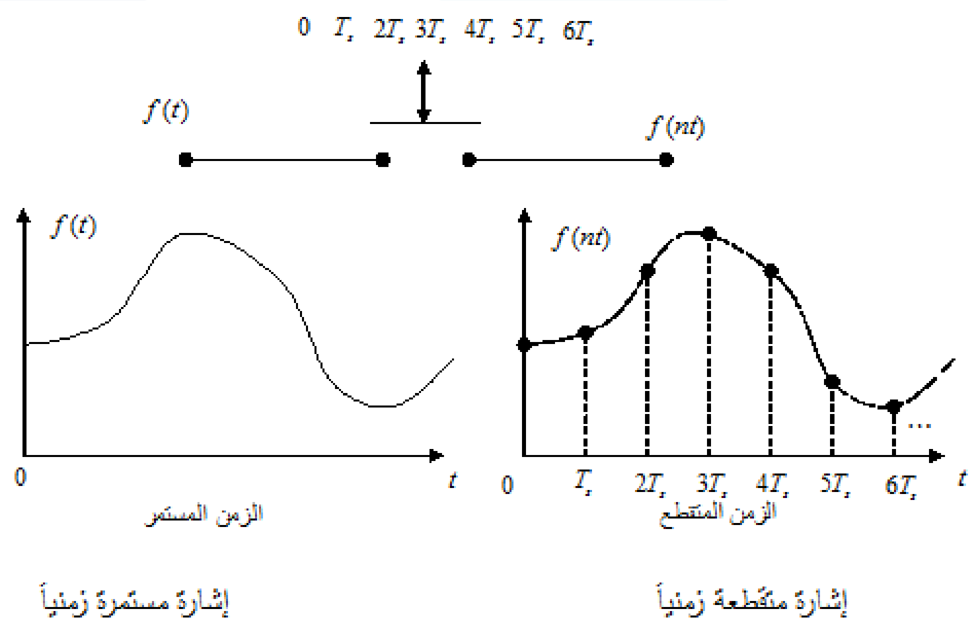
من رقمي إلى تماثلي: مفك الترميز أو ماسك يحول إشارة الأوامر الرقمية إلى إشارة مستمرة زمنياً.



الشكل (1-4) وظيفة المقطع والماسك

تقطيع الإشارة المستمرة:

فيزيائياً يقوم جهاز إلكتروني بتقطيع الإشارة المستمرة أما رياضياً فيتم التعبير عن تقطيع الإشارة كما يلي:



الشكل (1-5) تقطيع الإشارة رياضياً

يمثل المقطع بمفتاح مفتوح يغلق نبضياً كل فترة زمنية بخطوة ثابتة تسمى خطوة التقطيع تحدد من قبل المصمم.

عند كل إغلاق تؤخذ عينة من الإشارة المستمرة فنحصل على إشارة عينات كما يلي:

t	0	T_s	$2T_s$	$\cdots$	nT_s	$\cdots$
$f(nT_s)$	$f(0)$	$f(T_s)$	$f(2T_s)$	$\cdots$	$f(nT_s)$	$\cdots$

أي أن الإشارة المتقطعة هي مجموعة عينات يعبر عنها رياضياً بالعلاقة التالية:

$$F(z)=f(0)+f(T_s)z^{-1}+f(2T_s)z^{-2}+\cdots++f(nT_s)z^{-n} \qquad (1.1)$$

في هذه العلاقة الأمثال الثابتة هي قيم العينات لإشارة ما ويوجد متحول z وهو يماثل في فائدته متحول لابلاس في الزمن المستمر.

تمثل العلاقة (2.1) أيضاً تحويل Z للإشارة $f(t)$ ويمكن التعبير عن تحويل تحويل Z لإشارة بالقانون التالي:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT_s)z^{-n} \qquad (2.1)$$

تعريف تحويل Z:

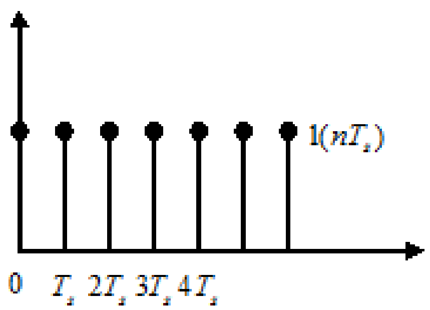
هو الأداة الرئيسية في تحليل الأنظمة في الزمن المتقطع وهو يماثل في فائدته تحويل لابلاس في أنظمة الزمن المستمر.
تحويل Z هو تحويل لابلاس لإشارة متقطعة زمنياً.

$$F(z)=F^*(s)=\ell[f^*(t)]=\sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT_s)z^{-n} \qquad (3.1)$$

تحويلات Z:

مثال 1-1:

أوجد تحويل Z لتابع الخطوة الواحدية (Unit-step function) $f(t)=u(t)=1(t)$. يوضح الشكل (1-6) تابع الخطوة الواحدية المتقطع زمنياً.



الشكل (1-6) تابع الخطوة الواحدية المتقطع

الحل:

باستخدام تعريف تحويل Z

$$F(z)=F^{*}(s)=\ell[f^{*}(t)]=\sum_{n=0}^{n=\infty}f(nT_s)z^{-n}$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-n}$$

و هو مجموع متوالية هندسية $F(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$

و يمكن التأكد بإجراء القسمة $\dfrac{z}{z-1}$ فنحصل على $1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+ +z^{-n}$

مثال 1-2:

أوجد تحويل Z للتابع الأسي (Exponential Function) التالي:

$$f(t)=e^{\lambda t}$$

الحل:

$$F(z)=Z(e^{\lambda t})=\sum_{n=0}^{n=\infty}e^{\lambda nT_s}z^{-n}=1+e^{\lambda T_s}z^{-1}+e^{2\lambda T_s}z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1-e^{\lambda T_s}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{\lambda T_s}}$$

مثال 1-3:

أوجد تحويل Z لتابع الإنحدار الواحدي (Unit-Ramp Function) التالي:

$$f(t)=t$$

الحل:

$$F(z)=Z(t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}nT_sz^{-n}=T_s\sum_{n=0}^{n=\infty}nz^{-n}=T_sz\sum_{n=0}^{n=\infty}nz^{-n-1}=-T_sz\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{d}{dz}z^{-n}$$

$$=-T_sz\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{n=\infty}z^{-n}=-T_sz\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{zT_sz^{-2}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{zT_s}{(z-1)^2}$$

حيث: $\sum_{n=0}^{n=\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-n}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ من المثال (1-1).

يتم تجزئة التابع $f(t)$ أو $F(s)$ إلى مجموعة توابع جزئية تحويل Z لها معلوم و مصنف في الجداول.

مثال 1-4:

أوجد تحويل Z للتابع . $\dfrac{4}{s(s+1)}$.

الحل:

نجزئ التابع إلى تابعين كما يلي:

$$\frac{4}{s(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}$$

تحسب الثوابت كما يلي:

$$A=s\left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=0}=4$$

$$B=(s+1)\left.\frac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-1}=-4$$

أي أن التابع سيكتب بالشكل التالي:

$$\frac{4}{s(s+1)}=\frac{4}{s}+\frac{-4}{s+1}$$

و بالتالي يكون تحويل Z له:

$$Z\left[\frac{4}{s(s+1)}\right]=Z\left[\frac{4}{s}\right]+Z\left[\frac{-4}{s+1}\right]$$

يؤخذ تحويل Z من الجداول للتابعين الجزئيين كما يلي:

$$Z\left[\frac{4}{s(s+1)}\right]=\frac{4z}{z-1}-\frac{4z}{z-e^{-T_s}}$$

يبين الجدول (1-1) التالي تحويل Z للأنظمة والإشارات النموذجية.

$U(s)$	$u(kT_s)$	$U(z)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT_s	$\frac{T_s z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT_s}	$\frac{z}{z-e^{-aT_s}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kT_s e^{-akT_s}$	$\frac{T_s e^{-aT_s} z}{(z-e^{-aT_s})^2}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kT_s)$	$\frac{\sin(\omega T_s) z}{z^2-2\cos(\omega T_s) z+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kT_s)$	$\frac{z^2-\cos(\omega T_s) z}{z^2-2\cos(\omega T_s) z+1}$
$\frac{\omega}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$	$e^{-akT_s}\sin(\omega kT_s)$	$\frac{\sin(\omega T_s) e^{-aT_s} z}{z^2-2\cos(\omega T_s) e^{-aT_s} z+e^{-2aT_s}}$
$\frac{s+a}{s^2+2as+a^2+\omega^2}$	$e^{-akT_s}\cos(\omega kT_s)$	$\frac{z^2-\cos(\omega T_s) e^{-aT_s} z}{z^2-2\cos(\omega T_s) e^{-aT_s} z+e^{-2aT_s}}$

الجدول (1-1) تحويات لابلاس وz

خواص تحويلات Z:

1. **الخطية (Linearity)**

تحويل Z لمجموع تابعين يساوي مجموع تحويلي Z للتابعين كما يلي:

$$Z[f(t)+h(t)]=F(z)+H(z)$$

2. **الضرب بثابت (Multiplication)**

تحويل Z لتابع مضروب بمقدار ثابت يساوي الثابت مضروب بتحويل Z للتابع كما يلي:

$$Z[\lambda f(t)]=\lambda F(z)$$

3. **الإزاحة الزمنية (Shifting)**

هنا نراعي حالتين و هما حالة تأخير و حالة تقديم:

$$Z[f(t-mT_s)]=z^{-m}F(z)$$ حالة تأخير (Time delay)

$$Z[f(t+mT_s)]=z^{m}F(z)-\sum_{n=0}^{m-1} f(nT_s)z^{m-n}$$ حالة تقديم (Time advance)

مثال 1-5:

أوجد تحويل Z للتابعين $h(t)=t$ و $h(t+2T_s)$ باستخدام خواص تحويل Z.

الحل:

$$Z[h(t)]=H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(nT_s)z^{-n}=0+T_sz^{-1}+2T_sz^{-2}+3T_sz^{-3}+....+nT_sz^{-n}$$

بتطبيق نظرية الإزاحة الزمنية: $Z[f(t+mT_s)]=z^mF(z)-\sum_{n=0}^{m-1}f(nT_s)z^{m-n}$

$$Z[h(t+2T_s)]=z^2H(z)-\sum_{n=0}^{1}h(nT_s)z^{2-n}=z^2\left(0+T_sz^{-1}+2T_sz^{-2}+3T_sz^{-3}+....+nT_sz^{-n}\right)-T_sz^1$$

$$Z[h(t+2T_s)]=0+2T_sz^0+3T_sz^{-1}+....+nT_sz^{-n+2}$$

حيث: $z^0=1$.

4. **خاصية الضرب بـ** e^{-at}

$$Z\left[e^{-at}\cdot f(t)\right]=F(ze^{aT_s})$$

مثال 1-6:

أوجد تحويل Z لاستجابة النظام $\frac{1}{s+a}$ لتابع الخطوة الواحدية $h(t)=1(t)$.

الحل:

إن التابع الزمني الموافق لـ $\frac{1}{s+a}$ هو e^{-at} بالتالي استجابة النظام للدخل المفترض $1(t)e^{-at}$

باستخدام الخاصية السابقة.

$$Z\left[e^{-at}\cdot 1(t)\right]=F(ze^{aT_s})=\frac{ze^{aT_s}}{ze^{aT_s}-1}=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT_s}}$$

حيث: $Z[1(t)]=\frac{z}{z-1}$.

5. **خاصية الضرب بـ** t

$$Z[t\cdot f(t)]=-T_sz\frac{d}{dz}F(z)$$

مثال 1-7:

أوجد تحويل Z لتابع الانحدار الواحدي $h(t)=t$

الحل:

$$h(t)=t\cdot 1(t)$$

$$Z[t \cdot f(t)] = -T_s z \frac{d}{dz} F(z)$$

$$Z[t \cdot 1(t)] = -T_s z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -T_s z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{T_s z}{(z-1)^2}$$

6. **نظرية القيمة الأولية (Initial Value)**

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

مثال 1-8:

أوجد القيمة الأولية لتابع الانحدار الواحدي $f_1(t) = t$ و للتابع الأسي $f_2(t) = e^{-at}$ باستخدام تحويل Z.

الحل:

من الجداول في الملحق.

$$F_1(z) = \frac{T_s z}{(z-1)^2}$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_s}}$$

بتطبيق نظرية القيمة الأولية.

$$\lim_{t \to 0} f_1(t) = \lim_{z \to \infty} F_1(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{T_s z}{(z-1)^2} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} f_2(t) = \lim_{z \to \infty} F_2(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{(z - e^{-aT_s})} = 1$$

تتطابق النتيجتان السابقتان مع $f_1(0) = 0$ و $f_2(0) = e^0 = 1$.

7. **نظرية القيمة النهائية (Final Value)**

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) F(z)$$

مثال 1-9:

أوجد القيمة النهائية لتابع الانحدار الواحدي $f_1(t) = t$ و للتابع الأسي $f_2(t) = e^{-at}$ باستخدام تحويل Z.

الحل: من الجداول.

$$F_1(z) = \frac{T_s z}{(z-1)^2}$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_s}}$$

بتطبيق نظرية القيمة النهائية.

$$\lim_{t \to \infty} f_1(t) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) F_1(z) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) \frac{T_s z}{(z-1)^2} = \lim_{z \to 1} \frac{T_s}{(z-1)} = \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} f_2(t) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) F_2(z) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) \frac{z}{(z - e^{-aT_s})} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z - e^{-aT_s}} = \frac{0}{1 - e^{-aT_s}} = 0$$

تتطابق النتيجتان السابقتان مع $f_1(\infty)=\infty$ و $f_2(\infty)=e^{-\infty}=0$.

مثال 1-10:

أوجد تحويل Z للتابع $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$.

الحل:

يمكن تجزئة التابع السابق كما يلي:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=E+\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s+1}$$

حيث يوجد للتابع $F(s)$ جذر حقيقي مكرر مرتين قيمته صفر و جذر حقيقي -1.

نحسب الثوابت كما يلي:

$E=0$ لأن درجة المقام أعلى من البسط:

$$a=s^2\left.\frac{1}{s^2(s+1)}\right|_{s=0}=1$$

$$c=(s+1)\left.\frac{1}{s^2(s+1)}\right|_{s=1}=1$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=0=\lim_{s\to\infty}(\frac{1}{s}+b+\frac{s}{s+1})=b+1$$
$$\Rightarrow b=-1$$

أي أن التابع أعلاه يكتب بالشكل:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

و يأخذ تحويل Z له من الجداول الشكل التالي:

$$F(z)=Z(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1})=\frac{T_s z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T_s}}$$

مثال 1-11:

أوجد تحويل Z للتابع $F(s)=\dfrac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}$.

الحل:

يمكن تجزئة التابع السابق كما يلي:

$$F(s)=\frac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}=E+\frac{a}{s+1}+\frac{b}{(s+1)^2}+\frac{c}{(s+1)^3}+\frac{ds+e}{(s^2+1)}$$

حيث يوجد للتابع $F(s)$ جذر حقيقي مكرر 3 مرات قيمته -1 و جذر رابع وهمي (i).

نحسب العوامل السابقة E,a,b,c,d,e:

درجة البسط أقل من درجة المقام يعني $E=0$.

بالنسبة للجذر الحقيقي:

$$c=(s+1)^3\left.\frac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}\right|_{s=-1}=-2$$

بالنسبة للجذر الوهمي:

$$\left.ds+e\right|_{s=i}=(s^2+1)\left.\frac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}\right|_{s=i}=-\frac{4i}{(i+1)^3}$$

بفك الأقواس و الإصلاح نحصل على $d=1, e=-d=-1$.

نحسب النهاية التالية:

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)=0\Rightarrow a+d=0\Rightarrow a=-1$$

$$F(0)=0\Rightarrow a+b+c+d=0\Rightarrow b=4$$

$$F(s)=\frac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}=-\frac{1}{s+1}+\frac{4}{(s+1)^2}-\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{s-1}{(s^2+1)}$$

تحويل Z من الجداول

$$-\frac{1}{s+1}\Rightarrow\frac{-z}{z-e^{-T_s}}$$

$$+\frac{4}{(s+1)^2}\Rightarrow 4\frac{T_sze^{-T_s}}{\left(z-e^{-T_s}\right)^2}$$

$$+\frac{s-1}{(s^2+1)}=\frac{s}{(s^2+1)}-\frac{1}{(s^2+1)}\Rightarrow\frac{z(z-\cos(T_s))}{z^2-2z\cos(T_s)+1}-\frac{z\sin(T_s)}{z^2-2z\cos(T_s)+1}$$

$$-\frac{2}{(s+1)^3}\Rightarrow$$

أما بالنسبة للحد الأخير $-\frac{2}{(s+1)^3}$

من الجداول $\ell[\frac{1}{2}t^2e^{-at}]=\frac{1}{(s+a)^3}$

و لكن تحويل Z من الجداول $te^{-at}\Rightarrow\frac{T_sze^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$

من خواص تحويل Z

$$Z[t\cdot f(t)]=-T_sz\frac{d}{dz}F(z)$$

$$Z[t \cdot t.e^{-at}] = -T_s z \frac{d}{dz}\left[\frac{T_s z e^{-aT_s}}{\left(z - e^{-aT_s}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{T_s^2 e^{-aT_s} z(z + e^{-aT_s})}{\left(z - e^{-aT_s}\right)^3}$$

بالتالي:

$$Z\left[\frac{4s^3}{(s^2+1)(s+1)^3}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{-z}{z - e^{-T_s}} + 4\frac{T_s z e^{-T_s}}{\left(z - e^{-T_s}\right)^2} + \frac{z(z - \cos(T_s))}{z^2 - 2z\cos(T_s) + 1} - \frac{z\sin(T_s)}{z^2 - 2z\cos(T_s) + 1} - \frac{T_s^2 e^{-aT_s} z(z + e^{-aT_s})}{\left(z - e^{-aT_s}\right)^3}$$

وهو المطلوب.

التكامل (Integrator) و التفاضل (Differentiator) باستخدام تحويل Z

إن تكامل إشارة أو تابع هو المساحة المحصورة تحت منحني التابع أو الإشارة لذلك فأن تقسيم المساحة الكلية تحت المنحني إلى مساحات جزئية (مستطيلات مثلاً) و من ثم جمعها يسمح بالحصول على التكامل المطلوب.

يمكن أن يجرى التكامل الرقمي إذن بعدة طرق منها:

أولاً- طريقة المستطيلات: حيث يتم تقسيم المنطقة تحت المنحني إلى مستطيلات و يوجد لذلك أسلوبان: الفرق باتجاه الخلف و الفرق باتجاه الأمام.

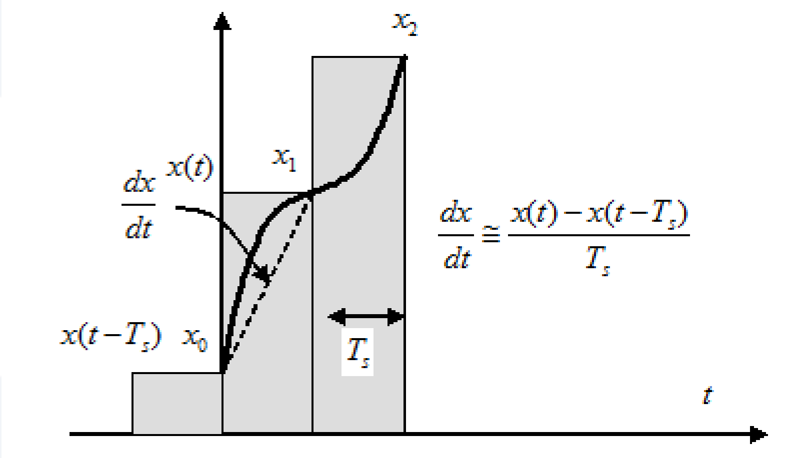
1. **الفرق باتجاه الخلف (Backward integration):**

يوضح الشكل (7) التقسيم إلى مستطيلات حيث يحسب التفاضل في اللحظة الحالية من قيمة التابع في اللحظة الحالية و قيمته في اللحظة السابقة كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t) - x(t - T_s)}{T_s}$$

بإدخال الرمز z كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} x(t) = \frac{z - 1}{zT_s} x(t)$$



الشكل (1-7) الفرق باتجاه الخلف

بالتالي يكون التفاضل في المستوي Z:

$$s = \frac{z-1}{zT_s}$$

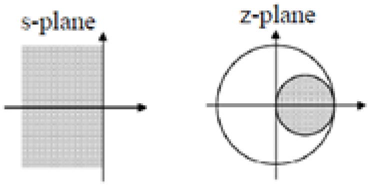
و هذا يتوافق مع العلاقة: $z = e^{T_s s} \cong \frac{1}{1-T_s s} \Rightarrow s = \frac{1}{T_s}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \frac{z-1}{T_s z}$

و يكون التكامل $\frac{1}{s} = \frac{zT_s}{z-1}$ و يحسب التكامل بالعلاقة:

$$I = \int_0^{\tau} x(t)dt = \sum_{n=1}^{m} x(nT_s)T_s,\ i_n = i_{n-1} + T_s x_n$$

و تكون المناطق المظللة متماثلة في المستويين s و Z كما يلي:

$$\frac{1}{s} = \frac{T_s}{1-z^{-1}} \Rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T_s} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-sT_s}$$



الشكل (1-8) المناطق المتشابهة (الفرق باتجاه الخلف)

2. الفرق باتجاه الأمام (Forward Integration):

يوضح الشكل (8) التقسيم إلى مستطيلات حيث يحسب التفاضل في اللحظة الحالية من قيمة التابع الحالية و قيمته في اللحظة اللاحقة كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t+T_s) - x(t)}{T_s}$$

بإدخال الرمز z كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z-1}{T_s} x(t)$$

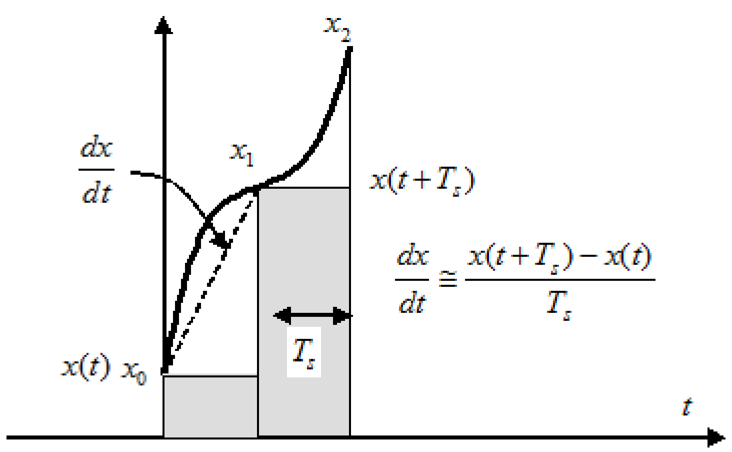
بالتالي يكون التفاضل في المستوي Z:

$$s = \frac{z-1}{T_s}$$

و هذا يتوافق مع العلاقة $z = e^{T_s s} \cong 1 + T_s s \Rightarrow s = \dfrac{z-1}{T_s}$

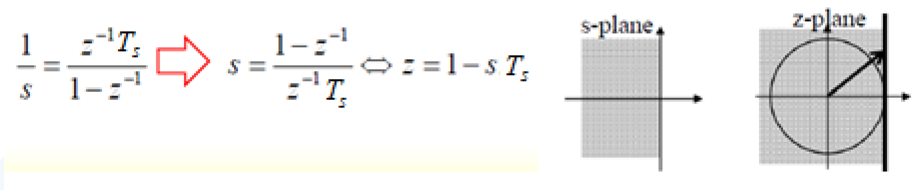
و يكون التكامل $\dfrac{1}{s} = \dfrac{T_s}{z-1}$ و يحسب التكامل بالعلاقة:

$$I = \int_0^{\tau} x(t)dt = \sum_{n=0}^{m-1} x(nT_s)T_s,\ i_n = i_{n-1} + T_s x_{n-1}$$



الشكل (1-9) الفرق باتجاه الأمام

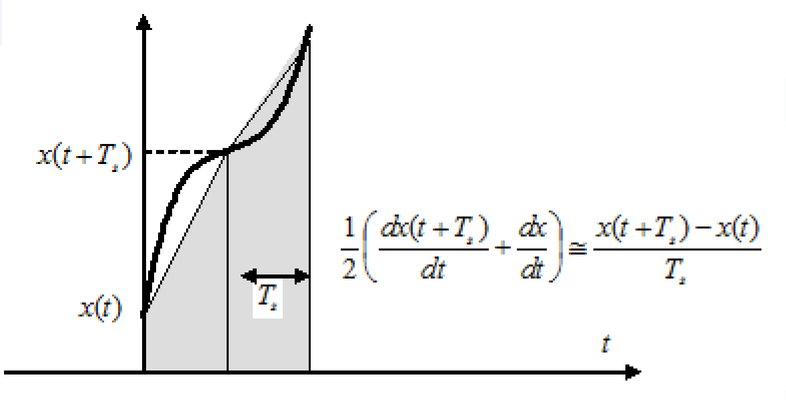
و تكون المناطق المظللة متماثلة في المستويين s و Z كما يلي:



الشكل (1-10) المناطق المتشابهة (الفرق باتجاه الأمام)

ثانياَ- طريقة شبه المنحرف (Trapezoidal Integration):

يسمى أيضاً التحويل ثنائي الخطية (Bilinear) أو تحويل Tustin و يوضح الشكل (9) كيفية تقسيم المنطقة إلى أشباه منحرفات.



الشكل (1-11) طريقة شبه المنحرف

بإدخال الرمز z كما يلي:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx(t+T_s)}{dt}+\frac{dx}{dt}\right)\cong\frac{x(t+T_s)-x(t)}{T_s}$$

$$\frac{z+1}{2}\frac{dx}{dt}\cong\frac{z-1}{T_s}x(t)\Rightarrow\frac{dx}{dt}\cong\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}x(t)$$

بالتالي يكون التفاضل في المستوي Z:

$$s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

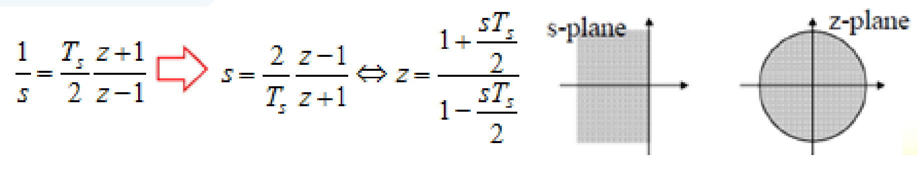
و هذا يتوافق مع العلاقة:

$$z=e^{T_s s}\cong\frac{e^{\frac{T_s}{2}s}}{e^{-\frac{T_s}{2}s}}=\frac{1+\frac{T_s}{2}s}{1-\frac{T_s}{2}s}=\frac{2+T_s s}{2-T_s s}$$

و يكون التكامل: $\frac{1}{s}=\frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1}$ و يحسب التكامل بالعلاقة:

$$I=\int_0^{\tau}x(t)dt=\sum_{n=1}^{m}\frac{x((n-1)T_s)+x(nT_s)}{2}T_s,\ i_n=i_{n-1}+\frac{T_s}{2}(x_{n-1}+x_n)$$

و تكون المناطق المظللة متماثلة في المستويين S و Z كما يلي:



الشكل (1-12) المناطق المتشابهة (طريقة شبه المنحرف)

يستخدم هذا التحويل في رسم الاستجابة الترددية للأنظمة الرقمية أي نقوم بالتحويل للمستوي S ثم نرسم مخططات بود و نايكوست كما هو معلوم.

ثالثاً- طريقة نيوتن

بفرض $Y(z)$ هي تفاضل $U(z)$ يكون:

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{T_s}\left[(1-z^{-1})+(\frac{1-z^{-1}}{2})^2+(\frac{1-z^{-1}}{3})^3+\cdots+(\frac{1-z^{-1}}{n})^n\right]$$

تحويل Z العكسي:

يستخدم تحويل Z العكسي من أجل العودة للأصل الزمني المتقطع لتابع في المستوي Z إما لرسم الخرج للنظام في الزمن المتقطع $f(kT_s)$ أو لأجل إيجاد معادلة الفرق (Difference Equation) لمتحكم و ذلك لبرمجتها في الحاسب و يوجد عدة طرق منها:

طريقة تقسيم كثير الحدود (Division Method)

تؤدي هذه الطريقة للحصول على القيم الرقمية (Values) للعينات مباشرة.

مثال 1-12: أوجد الأصل الزمني للتابع $F(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$

الحل:

بإجراء القسمة المباشرة كما يلي:

$$\begin{array}{l|l}
z & z-0.5 \\ \cline{2-2}
\underline{-z+0.5} & \\
0+0.5 & 1+0.5z^{-1}+0.25z^{-2}+\cdots \\
\underline{-0.5+0.25z^{-1}} & \Downarrow \\
0+0.25z^{-1} & f(0)+f(T_s)z^{-1}+f(2T_s)z^{-2}+\cdots \\
\vdots &
\end{array}$$

نحصل على التابع الأصلي في الزمن المتقطع التالي:

$$f(kT_s)=\delta(t)+0.5\delta(t-T_s)+0.25\delta(t-2T_s)+\cdots$$

حيث: $\delta(t)$ تحويل Z العكسي لـ 1 و $\delta(t-T_s)$ تحويل Z العكسي لـ z^{-1} من نظرية التأخير الزمني.

قيم العينات في كل لحظة تقطيع هي:

$$f(0)=1,\ f(T_s)=0.5,\ f(2T_s)=0.25\cdots$$

طريقة الجداول

يمكن تجزئة كثير الحدود في z التابع $\dfrac{F(z)}{z}$ إلى توابع جزئية معروف تحويل Z لها من الجداول و ذلك كما يلي:

1- كتابة $\dfrac{F(z)}{z}$ كعناصر بسيطة.

2- حساب جذور المقام $z_1, z_2, z_3, \cdots$.

3- بناء الشكل التالي $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{c_1}{z-z_1}+\dfrac{c_2}{z-z_2}+\dfrac{c_3}{z-z_3}+\cdots$.

4- العودة إلى الشكل $F(z)=\frac{c_1 z}{z-z_1}+\frac{c_2 z}{z-z_2}+\frac{c_3 z}{z-z_3}+\cdots$.

5- استخدام العلاقة $Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^k$.

6- الحصول على $f(kT_s)=c_1 z_1^k+c_2 z_2^k+c_3 z_3^k+\cdots+c_n z_n^k$.

يمكن أن تكون جذور المقام $z_1, z_2, z_3,\cdots$ حقيقية أو عقدية مترافقة.

مثال 1-13: أوجد تحويل Z العكسي للتابع $F(z)=\frac{z(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$.

الحل: نقسم التابع على z أي $\frac{F(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$.

بالتجزئة إلى توابع جزئية:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{(z-e^{-aT_s})}$$

بالعودة للشكل الأساسي:

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)}-\frac{z}{(z-e^{-aT_s})}$$

تحويل Z العكسي:

$$F^{-1}(z)=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)}\right]-Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-e^{-aT_s})}\right]$$

من الجداول أو الفقرة أعلاه:

$$F^{-1}(z)=1-e^{-akT_s}$$

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}, \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if $(m>0)$ or ∞ if $(m<0)$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$(n+1)a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\dfrac{z}{z-a}\right]^2$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$(\cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(\sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$
$(r^n \sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(r\sin\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$