المحاضرة الثانية

النمذجة والتحكم في الزمن المتقطع

د. نسمت أبو طبق

الفقرات الرئيسية:

تابع النقل العيني ومعادلة الفروق

استقراء الإشارة

تحويل Z لنظام مسبوق بماسك صفري

تقطيع الأنظمة

تجميع الأنظمة العينية

تقطيع المتحكمات التقليدية

النمذجة والتحكم في الزمن المتقطع

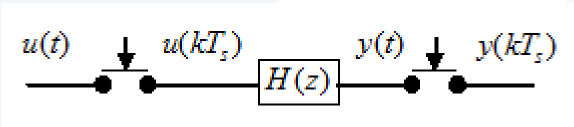
المقدمة:

نتطرق فيما يلي إلى نمذجة الأنظمة والتحويل من الزمن المستمر إلى الزمن المتقطع. سنوجد أيضاً توابع النقل في المستوي z وتوابع نقل المتحكمات الموافقة وطرق تجميع الأنظمة والمتحكمات والحلقة المغلقة.

تابع النقل العيني ومعادلة الفروق:

تعريف:

يبين الشكل (1-2) تقطيع إشارة الدخل والخرج لنظام.



الشكل (1-2) نظام عيني

تحويل Z للدخل $U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u(kT_s)z^{-k}$

تحويل Z للخرج $Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT_s)z^{-k}$

تابع النقل العيني هو نسبة (Ratio) تحويل Z للخرج إلى تحويل Z للدخل $H(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}$.

أو الخرج: $Y(z)=H(z)U(z)$.

يمكن كتابة تابع النقل العيني بقوى z المتزايدة بالشكل التالي:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots a_mz^m}{b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots b_nz^n},n\geq m$$

أو بقوى zالمتناقصة بالشكل:

$$H(z)=\frac{c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+c_3z^{-3}+\cdots c_pz^{-p}}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}+d_3z^{-3}+\cdots d_qz^{-q}},\forall\,(p,q) \qquad (1\text{-}2)$$

مثال 2-1: أوجد تابع النقل العيني (تابع النقل النبضي) $G(z)$ للنظام من الدرجة الأولى الذي تابع نقله معطى كما يلي:

$$G(s)=\frac{1}{s+a}$$

الحل: باعتبار أنه يوجد مقطع أمام النظام يكون: $G(z)=Z[G(s)]$

طريقة أولى: من جداول تحويل Z يمكن كتابة:

$$Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$$

أي:

$$G(z)=\frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$$

طريقة ثانية: نعود بالتابع إلى أصله الزمني:

$$g(t)=\ell^{-1}[G(s)]=e^{-at}$$

بالتالي:

$$g(kT_s)=e^{-akT_s}, k=0,1,2,\cdots$$

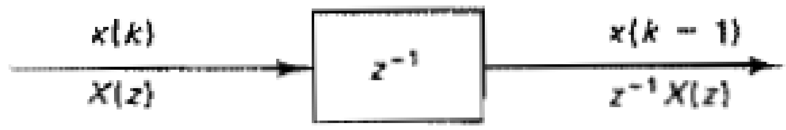
باستخدام تعريف تحويل Z:

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g(kT_s)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT_s}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{aT_s}z\right)^{-k}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$$

إيجاد معادلة الفروق:

يمكن الانتقال من تابع النقل العيني إلى معادلة الفروق و بالعكس من خلال التوافق بين $u((k-s)T_s)\Leftrightarrow U(z)z^{-s}$ و $y((k-r)T_s)\Leftrightarrow Y(z)z^{-r}$. يوضح الشكل (2-2) التالي هذا التوافق.



الشكل (2-2) تابع نقل عيني يظهر التأخير لخطوة واحدة (unit delay)

مثال 2-2:

أوجد خرج النظام التالي عند دخل خطوة واحدية $H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1-e^{-at}}{z-e^{-at}}$ حيث $e^{-at}=0.5$.

الحل:

نضع التابع $H(z)$ بقوى z المتناقصة كما يلي: $H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

بالتالي: $Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)=0.5z^{-1}U(z)$

من خلال التوافق بين $u((k-s)T_s)\Leftrightarrow U(z)z^{-s}$ و $y((k-r)T_s)\Leftrightarrow Y(z)z^{-r}$.تصبح معادلة الفرق

$$y(kT_s)=0.5u((k-1)T_s)+0.5y((k-1)T_s)$$

عند تطبيق دخل خطوة واحدية نرتب الجدول التالي:

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	∞
$u((k-1)T_s)$	0	1	1	1	1	$\cdots$	1
$y(kT_s)$	0	0.5	0.75	0.875	0,9375	$\cdots$	1

القيمة النهائية للاستجابة تحسب من نظرية القيمة النهائية لتابع في المستوى Z:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{z\to1} H(z)U(z)\frac{z-1}{z} = \lim_{z\to1} \frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z} = 1$$

يمكن حل المثال السابق بطريقة أخرى كما يلي:

تابع نقل النظام $H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ بفرض أن الدخل تابع خطوة واحدي $U(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

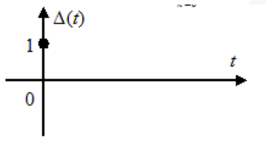
يكون الخرج:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{0.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{\Delta(z)}$$

حيث: $\Delta(z)$ هو تحويل Z للتابع (نبضة كرونيكر Kronecker)، الشكل (3-2).

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 & for\ t = 0 \\ 0 & for\ t \neq 0 \end{cases}$$

تحويل Z لها: $\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT_s) z^{-k} = 1$



الشكل (3-2) نبضة كرونيكر

بالتالي تكون معادلة الفرق:

$$Y(z) = 0.5z^{-1}\Delta(z) + 1.5z^{-1}Y(z) - 0.5z^{-2}Y(z)$$

$$Y(kT_s) = 0.5\Delta((k-1)T_s) + 1.5y((k-1)T_s) - 0.5y((k-2)T_s)$$

لإيجاد الخرج ننشئ الجدول التالي:

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	∞
$0.5\Delta((k-1)T_s)$	0	0.5	0	0	0	$\cdots$	0
$1.5y((k-1)T_s)$	0	0	0.75	1.125	1.3125	$\cdots$	1.5
$-0.5y((k-2)T_s)$	0	0	0	-0.25	-0.375	$\cdots$	-0.5
$y(kT_s)$	0	0.5	0.75	0.875	0.9375	$\cdots$	1

حل معادلة الفروق باستخدام تحويل Z

لحل معادلة الفروق بطريقة تحويلات Z فوائد مشابهة لحل المعادلات التفاضلية بطريقة تحويلات لابلاس. حيث تتحول معادلة الفروق في تحويلات Z إلى معادلة جبرية تابعة لـ z.

ملاحظة: سنستخدم في الترميز $x(k)$ بدلاً من $x(kT_s)$

نظرية:

يعطى تحويل Z لـ $x(k+1)$ بالعلاقة التالية:

$$Z[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

حيث $X(z)=Z[x(k)]$ و $x(0)$ الشرط الابتدائي (Initial condition) لـ $x(k)$.

البرهان:

من القانون الأساسي لتحويل Z يمكن أن نكتب:

$$Z[x(k+1)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(1+k)z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}x(k)z^{-k+1}=z\sum_{k=1}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-x(k)\right]=zX(z)-zx(0)$$

إذا كان $x(0)=0 \Leftarrow Z[x(k+1)]=zX(z)$

بشكل مشابه يمكن حساب:

$$Z[x(k+2)]=zZ[x(k+1)]-zx(1)=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$$

بالحالة العامة:

$$Z[x(k+m)]=z^mX(z)-z^mx(0)-z^{m-1}x(1)-z^{m-2}x(2)\cdots-zx(m-1)$$

حيث m عدد صحيح.

مثال 2-3:

حل معادلة الفرق التالية بطريقة تحويلات Z.

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0 \qquad x(0)=0,x(1)=1$$

الحل:

نجري تحويل Z لطرفي المعادلة:

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+3zX(z)-3zx(0)+2X(z)=0$$

بالتعويض و الاختصار:

$$X(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}$$

$$=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

بإجراء تحويل Z العكسي من الجداول $Z[a^k]=\frac{z}{z-a}$ نحصل على حل معادلة الفرق كما يلي:

$$x(k)=Z^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right]-Z^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right]=-1^k+2^k;\, k=0,1,2\cdots$$

مثال 2-4:

المطلوب إيجاد استجابة النظام التالي:

$$x(k+2)-3x(k+1)+2x(k)=u(k)$$
$$x(k)=0 \quad for\ k\le 0,$$
$$u(0)=1, u(k)=0 \quad for\ k\neq 0,$$

الحل:

بما أنه يوجد $(k+2)$ فإننا بحاجة لمعرفة $x(0), x(1)$ إن $x(0)=0$ لإيجاد $x(1)$ نقوم بما يلي:

بفرض $k=-1$ عندها تصبح المعادلة $x(1)-3x(0)+2x(-1)=u(-1)$

أو $x(1)=u(-1)+3x(0)-2x(-1)=0+0-0=0$

بأخذ تحويل Z للطرفين مع مراعاة الشروط الابتدائية $x(0)=0$ و $x(1)=0$ و الإصلاح:

$$(z^2-3z+2)X(z)=U(z)$$

إن التابع $u(k)$ (نبضة كرونيكر) يسمى أيضاً التابع القسري و تحويل Z له:

$$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)z^{-k}=1$$

و بالتالي:

$$X(z)=\frac{1}{(z^2-3z+2)}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

لإيجاد تحويل Z العكسي نقوم بما يلي:

باستخدام العلاقة: $Z[x(k+1)]=zX(z)-zx(0)$ و باعتبار أن $x(0)=0$ يمكن كتابة:

$$Z[x(k+1)]=zX(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{z}{z-2}$$

تحويل Z العكسي من الجداول: $$Z^{-1}[zX(z)]=Z^{-1}\left[\frac{-z}{z-1}\right]+Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$x(k+1)=-1^k+2^k; k=0,1,2,\cdots$$

بالتالي:

$x(k)=-1^{k-1}+2^{k-1}; k=0,1,2,\cdots$ و هو المطلوب.

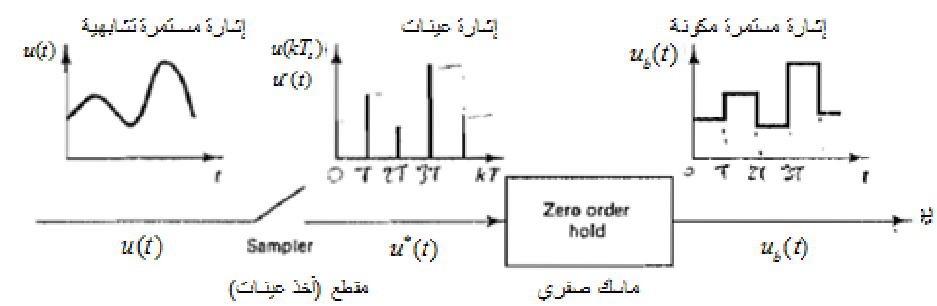
استقراء الإشارة (Signal Reconstruction)

إن الهدف من استقراء الإشارة (Data Extrapolator) هو إعادة تكوين إشارة مستمرة زمنياً انطلاقاً من إشارة متقطعة زمنياً (إشارة عينات). المستقرئ هو جهاز إلكتروني يستقبل في دخله إشارة عينات و يصدر في خرجه إشارة معاد تكوينها. يكون خرج المستقرئ عادة هو دخل النظام المتحكم به أو مشغل النظام. يوجد أنواع من المستقرئات حسب مبدأ العمل منها المستقرئ الصفري و يسمى الماسك الصفري (Zero Order Hold) و الماسك من الدرجة الأولى (First Order Hold).

يتوضع الماسك مباشرة قبل النظام أو مشغل النظام في حلقة التحكم الرقمي المغلقة لأن النظام لا يمكنه التعامل مع إشارة عينات بسبب انعدام الإشارة بين لحظات التقطيع.

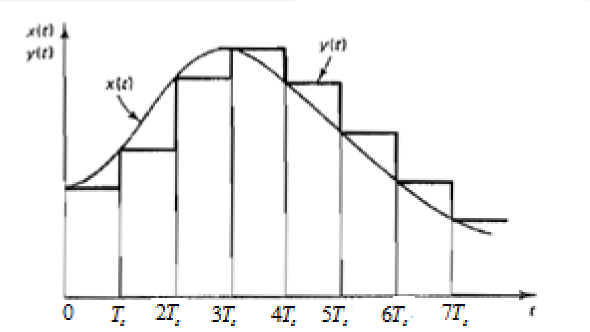
الماسك الصفري

سندرس هنا المستقرئ الأبسط و الأكثر شيوعاً و هو الماسك الصفري. يثبت هذا الماسك بين عينتين متتابعتين قيمة العينة السابقة كما هو موضح في الشكل (2-4).



الشكل (2-4) مبدأ عمل الماسك الصفري

يوضح الشكل (2-5) التالي إشارة تم الحصول عليها على خرج الماسك الصفري.



الشكل (2-5) دخل المقطع $x(t)$ و خرج الماسك الصفري $y(t)$

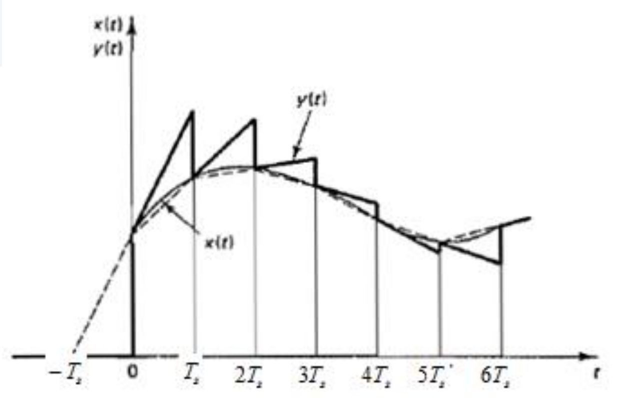
تحويل لابلاس للماسك الصفري

يمكن الحصول على تحويل لابلاس لتابع نقل الماسك الصفري بتطبيق إشارة دخل نبضية على دخله و معاينة الخرج.

$$B(s) = \ell\left[1(t) - 1(t - T_s)\right] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-T_s s}}{s} = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}$$

الماسك من الدرجة الأولى

يعتمد هذا المستقرئ على قيمتين في استقراء الخرج كما في الشكل (2-6) الذي يوضح خرج و دخل الماسك من الدرجة الأولى.



الشكل (2-6) دخل المقطع $x(t)$ و خرج الماسك من الدرجة الأولى $y(t)$

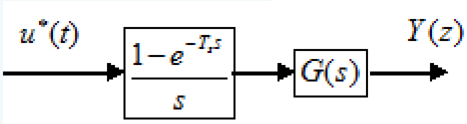
تابع نقل الماسك من الدرجة الأولى

تحويل لابلاس لتابع نقل الماسك من الدرجة الأولى:

$$B(s) = \frac{Y(s)}{X^{\bullet}(s)} = \frac{1+T_s s}{T_s}\left(\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\right)^2$$

تحويل Z لنظام مسبوق بماسك صفري

في أنظمة التحكم الرقمية يكون النظام المتحكم به مسبوقاً بماسك صفري، أنظر الشكل (2-7)، لذلك يعتبر النظام و الماسك وحدة متكاملة و نحتاج لإيجاد تحويل Z لهذه الوحدة من أجل إتمام عملية تصميم المتحكم أو دراسة الاستقرار أو تحليل الاستجابة.



الشكل (2-7) نظام مسبوق بماسك صفري

$$F(z) = Z\left[\frac{1-e^{-T_s s}}{s}G(s)\right] = Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] - Z\left[\frac{G(s)e^{-T_s s}}{s}\right]$$

من خواص تحويل Z نظرية التأخير:

$$F(z) = Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] - z^{-1}Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{(z-1)}{z}Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

مثال 2-5: أوجد تابع النقل العيني (تابع النقل النبضي) $G(z)$ للنظام من الدرجة الأولى الذي تابع نقله معطى كما يلي:

$$G(s) = \frac{1-e^{-T_s s}}{s}\frac{1}{s(s+1)}$$

الحل: باعتبار أنه يوجد مقطع أمام النظام يكون: $G(z)=Z[G(s)]$

$$G(z)=Z[G(s)]=Z\left[\left(1-e^{-T_s s}\right)\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)}\right]$$

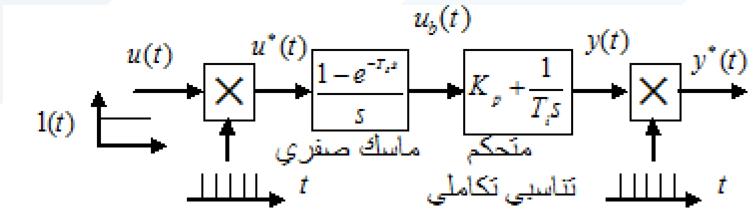
من جداول تحويل Z:

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}}\right]$$

$$=\frac{\left(T_s-1+e^{-T_s}\right)z^{-1}+\left(1-e^{-T_s}-T_s e^{-T_s}\right)z^{-2}}{(1-z^{-1})\left(1-e^{-T_s}z^{-1}\right)}$$

مثال 2-6:

لدينا النظام مع المستقرئ حسب المخطط النظري التالي، الشكل (2-8):

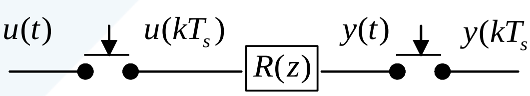


الشكل (2-8) مخطط النظام مع المستقرئ

أوجد تحويل Z للنظام و معادلة الفرق الموافقة مع العلم أن $T_i=10[s], K_p=2$ و زمن التقطيع $T_s=1$ أوجد الاستجابة الزمنية لدخل تابع خطوة واحدية.

الحل:

نبحث عن تابع النقل $R(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}$ كما في الشكل (2-9) التالي.



الشكل (2-9) نظام دخل و خرج متقطعين

$$R(z)=Z\left[\left(K_p+\frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\right)\right]$$

حسب النتيجة السابقة:

$$R(z)=Z\left[\frac{1}{s}\left(K_p+\frac{1}{T_i s}\right)\right]\left(1-z^{-1}\right)$$

$$R(z)=\left(Z\left[\frac{K_p}{s}\right]+Z\left[\frac{1}{T_i s^2}\right]\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

من الجداول:

$$Z\left[\frac{K_p}{s}\right]=\frac{K_p}{1-z^{-1}},\quad Z\left[\frac{1}{T_i s^2}\right]=\frac{\left(\frac{T_s}{T_i}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$R(z)=\left(\frac{K_p}{1-z^{-1}}+\frac{\left(\frac{T_s}{T_i}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}\right)\left(1-z^{-1}\right)=K_p+\frac{\left(\frac{T_s}{T_i}\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

بتوحيد المقامات و الإصلاح:

$$R(z)=\frac{K_p+\left(\frac{T_s}{T_i}-K_p\right)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

معادلة الفرق:

$$y(k)=K_p u(k)+\left(\frac{T_s}{T_i}-K_p\right)u(k-1)+y(k-1)$$

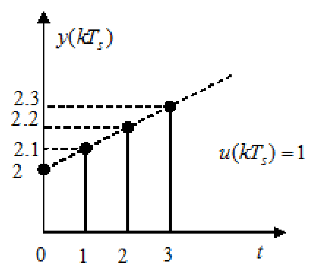
بتعويض المعاليم:

$$y(k)=2u(k)-1.9u(k-1)+y(k-1)$$

استجابة تابع الخطوة الواحدية:

k	0	1	2	3	$\cdots$	∞
$y(k)$	2	2.1	2.2	2.3	$\cdots$	∞

يوضح الشكل (2-10) رسماً لاستجابة الخطوة الوحدية في الزمن المتقطع.



الشكل (2-10) الاستجابة الزمنية المتقطعة

تجميع الأنظمة العينية

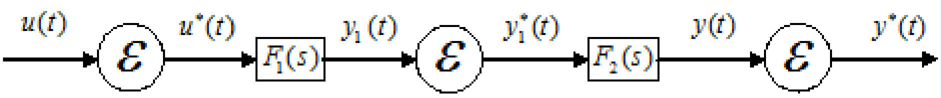
تتألف النظم الفيزيائية المتحكم بها بوساطة وحدة حساب من مجموعة أنظمة عينية بالإضافة إلى خوارزميات حساب. تختلف الأنظمة في الزمن المتقطع عن الأنظمة في الزمن المستمر في عملية اختزال أو تجميع المخططات الصندوقية. سنوضح فيما يلي كيفية اختزال الحلقة المفتوحة و الحلقة المغلقة.

الحلقة المفتوحة

نرمز لعملية التقطيع بالرمز ε حيث يتعلق تابع النقل في Z المكافئ بتوضع ε بين التوابع الجزئية كما يلي:

الحالة 1:

يوضح الشكل (2-11) المخطط الصندوقي للنظام المدروس.



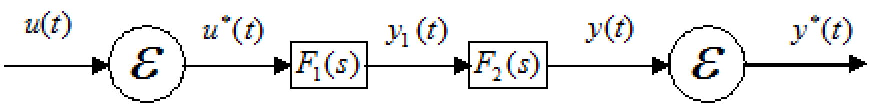
الشكل (2-11) يوجد تقطيع لكل الإشارات

بما أن التابعين $F_1(s), F_2(s)$ مفصولين بـ ε يمكن كتابة $Y_1^*(s)=F_1^*(s)U^*(s)$

و $Y_2^*(s)=F_2^*(s)Y_1^*(s)$ و يكون $\dfrac{Y(z)}{U(z)}=Z[F_1(s)]Z[F_2(s)]=F_1(z)F_2(z)$

الحالة 2:

يوضح الشكل (2-12) المخطط الصندوقي للنظام المدروس.



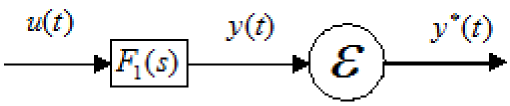
الشكل (2-12) لا يوجد تقطيع بين التابعين

في هذه الحالة لا يوجد تقطيع بين التابعين.

تابع النقل في Z المكافئ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=Z[F_1(s)F_2(s)]$$

الحالة 3: يوضح الشكل (2-13) المخطط الصندوقي للنظام المدروس.



الشكل (2-13) لا يوجد تقطيع لإشارة الدخل

في هذه الحالة $Y(s)=F_1(s)U(s)$ و تحويل Z للخرج هو $Y(z)=Z[F_1(s)U(s)]$ أي لا يوجد تابع نقل عيني لأن إشارة الدخل غير مقطعة.

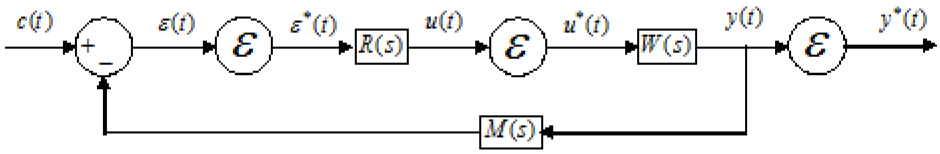
الحلقة المغلقة

كما في حالة الحلقة المفتوحة فإن تابع نقل الحلقة المغلقة يختلف بحسب توضع المقطع في المخطط الصندوقي لها.

سنعالج على سبيل المثال الحالتين التاليتين:

الحالة 1:

يوضح الشكل (2-14) مخططاً صندوقياً لحلقة مغلقة ما.

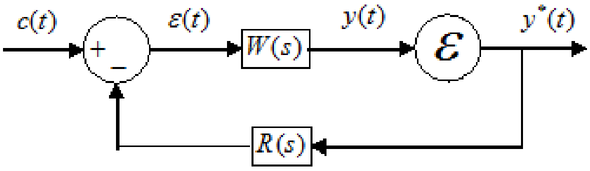


الشكل (2-14) حلقة مغلقة حالة 1

$$\frac{Y(z)}{C(z)}=\frac{W(z)R(z)}{1+Z[M(s)W(s)]R(z)}$$

الحالة 2:

في هذه الحالة يوجد فقط تقطيع في إشارة الخرج كما في الشكل (2-15) التالي.



الشكل (2-15) حلقة مغلقة حالة 2

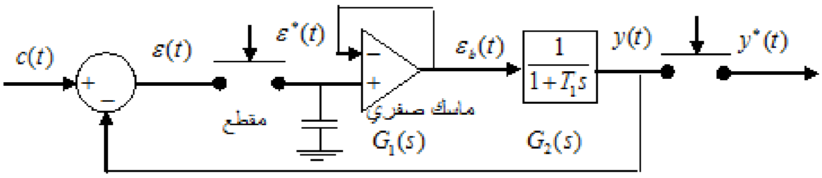
$$Y(s)=W(s)\varepsilon(s)=W(s)\left(C(s)-R(s)Y^{*}(s)\right)$$

$$Y(z)=Z[W(s)C(s)]-Z[W(s)R(s)]Y(z)$$

لا يوجد تابع نقل عيني بل تحويل Z للخرج

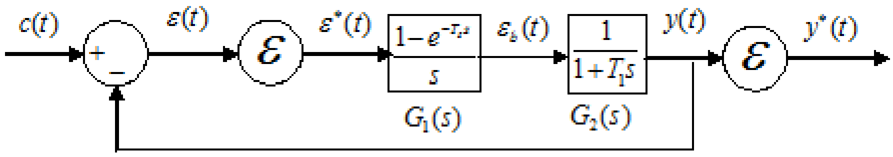
$$Y(z)=\frac{Z[W(s)C(s)]}{1+Z[W(s)R(s)]}$$

مثال 2-7: أوجد تابع نقل الحلقة المغلقة للنظام في الشكل (2-16) و هو نظام من الدرجة الأولى مسبوق بماسك صفري و مقطع. ارسم استجابة الخطوة الواحدية من أجل $T_s=1[s], T_1=10[s]$ و أيضاً $T_s=6.931[s], T_1=10[s]$.



الشكل (2-16) نظام درجة أولى مع ماسك صفري بحلقة مغلقة

الحل: المخطط النظري للحلقة المغلقة في الشكل (2-16) موضح في الشكل (2-17) كما يلي:



الشكل (2-17) المخطط النظري العام

$$Y(s)=\varepsilon^*(s)G_1(s)G_2(s)=\left(C(s)-Y(s)\right)^*G_1(s)G_2(s)$$

$$Y^*(s)=\left(C(s)-Y(s)\right)^*\left(G_1(s)G_2(s)\right)^*$$

$$Y(z)=\left(C(z)-Y(z)\right)Z\left[G_1(s)G_2(s)\right]$$

$$Y(z)=\left(C(z)-Y(z)\right)W(z)$$

$$\frac{Y(z)}{C(z)}=\frac{W(z)}{1+W(z)}$$

$$W(z)=Z\left[G_1(s)G_2(s)\right]=Z\left[\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\,\frac{1}{1+T_1 s}\right]$$

من قاعدة نظام مسبوق بماسك صفري:

$$W(z)=Z\left[G_1(s)G_2(s)\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}\,\frac{1}{1+T_1 s}\right]$$

من الجداول:

$$Z\left[\frac{1}{s}\,\frac{a}{(s+a)}\right]=\frac{z(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$$

$$Z\left[\frac{1}{s}\,\frac{1}{(T_1 s+1)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}\,\frac{\frac{1}{T_1}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)}\right]=\frac{z(1-e^{-T_s/T_1})}{(z-1)(z-e^{-T_s/T_1})}$$

$$W(z)=\frac{(z-1)}{z}\,\frac{z(1-e^{-T_s/T_1})}{(z-1)(z-e^{-T_s/T_1})}=\frac{(1-e^{-T_s/T_1})}{(z-e^{-T_s/T_1})}=\frac{z^{-1}(1-e^{-T_s/T_1})}{(1-z^{-1}e^{-T_s/T_1})}$$

$$\frac{Y(z)}{C(z)}=\frac{W(z)}{1+W(z)}=\frac{z^{-1}(1-e^{-T_s/T_1})}{1+z^{-1}(1-2e^{-T_s/T_1})}$$

معادلة الفرق:

$$y(kT_s)=(1-e^{-T_s/T_1})c((k-1)T_s)-(1-2e^{-T_s/T_1})y((k-1)T_s) \qquad (2\text{-}2)$$

أولاً- حالة $T_s = 1[s], T_1 = 10[s]$

$$y(kT_s) = 0.0952 \cdot c((k-1)T_s) + 0.8096 \cdot y((k-1)T_s)$$

استجابة الخطوة الواحدية:

$$\begin{array}{cccccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \infty \\ y(kT_s) & 0 & 0.0952 & 0.1723 & 0.2347 & 0.2852 & 0.3261 & \cdots & 0.5 \end{array}$$

ثانياً- حالة $T_s = 6.931[s], T_1 = 10[s]$ توافق إلغاء الحد الأخير من المعادلة (5-5) أي:

$$1 - 2e^{-T_s/T_1} = 0 \Rightarrow 1 - 2e^{-T_s/10} = 0 \Rightarrow T_s = 6.931$$

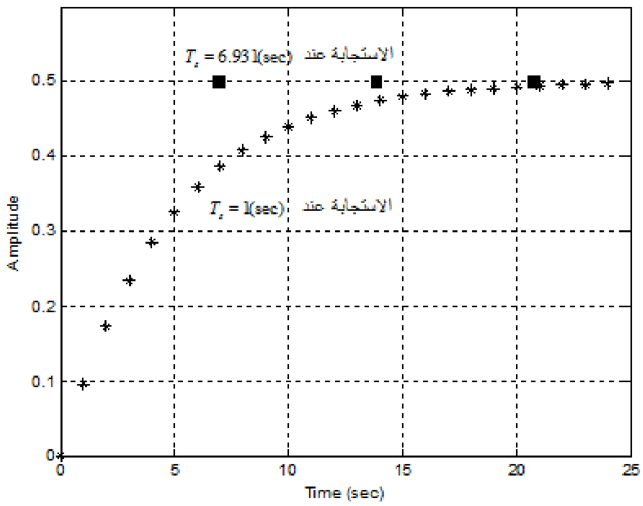
$$y(kT_s) = 0.5 \cdot c((k-1)T_s))$$

استجابة الخطوة الواحدية:

$$\begin{array}{cccccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & \infty \\ y(kT_s) & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \cdots & 0.5 \end{array}$$

حالة خاصة تسمى الاستجابة التامة حيث يصل الخرج إلى قيمته النهائية من أول لحظة تقطيع.

رسم الاستجابة باستخدام MATLAB موضح في الشكل (2-18) التالي.



الشكل (2-18) استجابة الخطوة الواحدية

تقطيع الأنظمة و المتحكمات التقليدية

(Systems and Classical Controllers Discretization)

سنقوم في هذه الفقرة بالإجابة عن السؤال حول كيفية إيجاد تابع النقل في المستوي Z الموافق لتابع نقل معلوم لنظام أو متحكم في المستوي اللابلاسي s و كيفية الحصول على معادلة الفرق و منها إيجاد الاستجابة المتقطعة للنظام أو المتحكم تجاه دخل ما.

تقطيع تابع نقل مستمر

سنقوم بشرح عملية التقطيع من خلال المثال التالي.

مثال 2-8:

ليكن لدينا على سبيل المثال تابع نقل لنظام من الدرجة الأولى كما يلي:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+10s}$$

نريد تقطيع تابع النقل أي إيجاد المكافئ له في المستوى Z بخطوة تقطيع $T_s=1[s]$.

لهذا الغرض نستخدم ثلاث طرق و هي:

1- استخدام عامل التفاضل للأمام أو للخلف

نستخدم العلاقة $s\cong\frac{1-z^{-1}}{T_s}$ و هي علاقة التفاضل إلى الخلف. حيث نقوم باستبدال كل s في تابع النقل بـ $\frac{1-z^{-1}}{T_s}$ كما يلي:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1+10\frac{1-z^{-1}}{T_s}}=\frac{1}{1+10-10z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{11-10z^{-1}}=\frac{0.0909}{1-0.909z^{-1}}$$

و منه نستنتج معادلة الفرق كما يلي:

$$y(k)=0.0909u(k)+0.909y(k-1)$$

2- التحويل ثنائي الخطية (Tustin)

هنا نستبدل كل s في تابع النقل بـ $\frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ كما يلي:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1+10\frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0476+0.0476z^{-1}}{1-0.9048z^{-1}}$$

و منه نستنتج معادلة الفرق كما يلي:

$$y(k)=0.0476u(k)+0.0476u(k-1)+0.9048y(k-1)$$

3- استخدام الماسك الصفري

في هذه الطريقة نعتبر أن النظام مسبوق بماسك صفري فيكون:

$$H(z)=Z\left[\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\frac{1}{1+10s}\right]=\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s}\frac{1}{1+10s}\right]$$

تحويل Z من الجداول:

$$H(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s}\frac{1}{1+10s}\right]=\frac{(1-e^{-T_s/10})z^{-1}}{1-e^{-T_s/10}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{0.0952z^{-1}}{1-0.9048z^{-1}}$$

و منه نستنتج معادلة الفرق كما يلي:

$$y(k) = 0.0952u(k-1) + 0.9048y(k-1)$$

الاستجابة الزمنية المتقطعة لدخل خطوة واحدية

من معادلات الفرق السابقة يمكن كتابة الجدول التالي:

case	$k=0$	1	2	3	4	$\cdots$	∞
1	0.0909	0.1736	0.2487	0.3170	0.3791	$\cdots$	1
2	0.0476	0.1382	0.2204	0.2946	0.3618	$\cdots$	1
3	0	0.0952	0.1813	0.2592	0.3297	$\cdots$	1
continous	0	0.0952	0.1813	0.2592	0.3297	$\cdots$	1

يمكن ملاحظة أن الاستجابة الرقمية لتابع الخطوة الواحدية للحالات الأربعة متقاربة و لكن الاستجابة الرقمية الأكثر قرباً من الاستجابة المستمرة هي حالة استخدام طريقة الماسك الصفري. هذه الحالة صحيحة فقط عندما تكون إشارة الدخل تابع خطوة واحدي أما عندما يكون الدخل شكل آخر فلا تطابق أي من الاستجابات الرقمية الاستجابة المستمرة. يعود السبب إلى أن الماسك الصفري يعيد إنتاج تابع الخطوة الواحدية على خرجه بشكل مثالي.

التمثيل الرقمي للأنظمة

أولاً- نظام من الدرجة الأولى

لنأخذ النظام التالي في الزمن المستمر.

$$H(s) = \frac{G}{1+\tau \cdot s}$$

نعتبر أن النظام مسبوق بماسك صفري فيكون تابع النقل المكافئ في Z:

$$H(z) = Z\left[\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\frac{G}{1+\tau \cdot s}\right] = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s}\frac{G}{1+\tau \cdot s}\right] = \frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1}{s}\frac{G}{1+\tau \cdot s}\right]$$

من الجداول: $Z\left[\frac{1}{s}\frac{a}{a+s}\right] = \frac{z(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$ بالتالي يكون:

$$H(z) = \frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1}{s}\frac{G}{1+\tau \cdot s}\right] = G\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{s(\frac{1}{\tau}+s)}\right] = G\frac{1-e^{-T_s/\tau}}{z-e^{-T_s/\tau}}$$

$$H(z) = G\frac{1-\lambda}{z-\lambda};\ \lambda = e^{-T_s/\tau}$$

و هو تحويل Z لنظام من الدرجة الأولى مسبوق بماسك صفري.

ثانياً- نظام من الدرجة الثانية

نعتبر أن النظام مسبوق بماسك صفري فيكون تحويل Z المكافئ:

$$F(z) = Z\left[\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}\right] = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}\right]$$

يمكن إجراء تحويل Z بطريقة الراسب أو بالتفريق إلى كسور جزئية فنحصل على التابع التالي:

$$F(z)=\frac{c_1z^{-1}+c_2z^{-2}}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}}$$

يمكن إيجاد قيم العوامل c_1,c_2,d_1,d_2 و هنا يتم التمييز بين عدة حالات حسب نوع الأقطاب.

3-7-5 التحكم باستخدام المتحكمات PID الرقمية

تم حالياً استبدال المتحكمات PID (Proportional-Integral-Derivative) التشابهية بأخرى رقمية (خوارزمية تنفذ بوساطة الحاسب). فيما يلي سنعالج موضوع تقطيع المتحكمات PID و عملية تعيير هذه المتحكمات.

1-3-7-5 اختيار فترة التقطيع

تتعلق قيمة خطوة التقطيع بديناميك النظام أي بالثابت الزمني الأساسي T_o لمجموعة النظام-متحكم بحلقة مغلقة. يجب أن تكون قيمة فترة التقطيع أقل من T_o و لكن بدون أن تكون صغيرة جداً. تعادل قيمة فترة التقطيع عملياً من نصف $\left(\frac{1}{2}\right)$ إلى عشر $\left(\frac{1}{10}\right)$ T_o.

2-3-7-5 اختيار طريقة التقطيع

يوجد عدة طرق للانتقال من توابع النقل في s إلى z. بهدف عدم تعقيد الشكل الرياضي للمتحكمات سنقوم بالتقطيع بالاعتماد على المقاربة $s\cong\frac{1-z^{-1}}{T_s}$ (الفرق باتجاه الخلف).

3-3-7-5 تقطيع المتحكمات و معادلة الفرق

سنقوم بحساب المعادل الرقمي للمتحكمات PID المستمرة المحسوبة سلفاً كما يلي:

أولاً- المتحكم الرقمي PI

تابع النقل المستمر للمتحكم التناسبي التكاملي $\frac{U(s)}{E(s)}=K_p(1+\frac{1}{T_is})$

باستبدال $s\cong\frac{1-z^{-1}}{T_s}$ في تابع النقل السابق:

$$\frac{U(z)}{E(z)}=K_p(1+\frac{1}{T_i\frac{1-z^{-1}}{T_s}})=\frac{K_p(1+\frac{T_s}{T_i})-K_pz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{r_0+r_1z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$r_0=K_p(1+\frac{T_s}{T_i}),r_1=-K_p$$

أو بالعكس

$$T_i = -\frac{r_1 T_s}{r_0 + r_1}, K_p = -r_1$$

معادلة الفرق

تستنتج معادلة الفرق من تابع النقل أي: $u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + u(k-1)$

خوارزمية التحكم

نحصل على خوارزمية التحكم من معادلة الفرق كما يلي:

تكرار

عند لحظة التقطيع

معرفة $y(k), w(k)$ المرجع و الخرج على الترتيب

حساب $e(k) = w(k) - y(k)$ الخطأ

حساب $u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + u(k-1)$ إشارة التحكم

إسناد $u(k) \to u(k-1)$

إسناد $e(k) \to e(k-1)$

تطبيق $u(k)$

حتى النهاية

ثانياً - المتحكم الرقمي PID

تابع النقل المستمر للمتحكم التناسبي التكاملي التفاضلي (Proportional-Integral-Derivative)

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

باستبدال $s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$ في تابع النقل السابق:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p (1 + \frac{T_s}{T_i}) - K_p (1 + \frac{T_d}{T_s}) z^{-1} + K_p \frac{T_d}{T_s} z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

و هو من الشكل التالي:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$r_0 = K_p (1 + \frac{T_s}{T_i}), r_1 = -K_p (1 + \frac{T_d}{T_s}), r_2 = K_p \frac{T_d}{T_s}$$

أو بالعكس

$$T_i = \frac{r_1 T_s}{r_0 + r_1 + r_0 r_2}, K_p = -\frac{r_1}{1 + r_2}, T_d = \frac{r_2 T_s}{K_p}$$

معادلة الفرق $u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) + u(k-1)$

خوارزمية التحكم

تكرار

عند لحظة التقطيع k

معرفة $y(k), w(k)$ المرجع و الخرج على الترتيب

حساب $e(k) = w(k) - y(k)$ الخطأ

حساب $u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) + u(k-1)$ إشارة التحكم

إسناد $u(k) \to u(k-1)$

إسناد $e(k-1) \to e(k-2)$

إسناد $e(k) \to e(k-1)$

تطبيق $u(k)$

حتى النهاية

ثالثاً - المتحكم الرقمي مع مرشح PIDN

تابع النقل المستمر للمتحكم التناسبي التكاملي التفاضلي مع مرشح

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s})$$

باستبدال $s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$ في تابع النقل السابق:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p(1 + \frac{T_s}{T_i} - Ns_1) + K_p(s_1(1 + \frac{T_s}{T_i} + 2N) - 1)z^{-1} - K_p s_1(1 + N)z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})}$$

و هو من الشكل التالي:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})}$$

$$s_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT_s}, r_0 = K_p(1 + \frac{T_s}{T_i} - Ns_1),$$

$$r_1 = K_p(s_1(1 + \frac{T_s}{T_i} + 2N) - 1), r_2 = -K_p s_1(1 + N)$$

أو بالعكس:

$$T_i = T_s K_p \frac{1 + s_1}{r_0 + r_1 + r_2}, K_p = \frac{r_0 s_1 - r_1 - r_2(2 + s_1)}{(1 + s_1)^2}$$

$$, T_d = T_s \frac{s_1^2 r_0 - s_1 r_1 + r_2}{K_p(1 + s_1)^3}, N = -T_d \frac{1 + s_1}{s_1 T_s}$$

معادلة الفرق

$$u(k)=r_0e(k)+r_1e(k-1)+r_2e(k-2)+(1-s_1)u(k-1)+s_1u(k-2)$$

خوارزمية التحكم

تكرار

عند لحظة التقطيع

معرفة $y(k), w(k)$ المرجع و الخرج على الترتيب

حساب $e(k)=w(k)-y(k)$ الخطأ

حساب $u(k)=r_0e(k)+r_1e(k-1)+r_2e(k-2)+(1-s_1)u(k-1)+s_1u(k-2)$ إشارة التحكم

إسناد $u(k-1)\rightarrow u(k-2)$

إسناد $u(k)\rightarrow u(k-1)$

إسناد $e(k-1)\rightarrow e(k-2)$

إسناد $e(k)\rightarrow e(k-1)$

تطبيق $u(k)$

حتى النهاية