المحاضرة الخامسة

التحكم في فضاء الحالة

د. نسمت أبو طبق

الفقرات الرئيسية

مقدمة

مفهوم التحكمية والمراقبية

استقرار الأنظمة ودراسة الاستقرار حسب ليابونوف

تصميم التحكم بالحالة بالتغذية العكسية

التحكم في فضاء الحالة

مقدمة

سنقوم في هذا الفصل بدراسة التحكم في الأنظمة المتقطعة والمستمرة في فضاء الحالة حيث سنعرض أولاً قابلية التحكم والمراقبة. من ثم ندرس الاستقرار ومفهوم ليابونوف للاستقرار. وبعد ذلك نصمم المتحكمات بطرق عدة. وأخيراً نتطرق لتصضميم مراقب الحالة بطرق متعددة.

قابلية التحكم و قابلية المراقبة (Controllability and Observability)

بالنسبة للنظام في الزمن المتقطع الممثل في فضاء الحالة بالمعادلة

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

يمكن اختبار قابلية التحكم (Controllability) و قابلية المراقبة (Obsrvability) حسب معيار كالمان (Kalman Criterion) كما يلي:

مصفوفة اختبار قابلية التحكم

$$c = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$$

حتى يكون النظام قابل للتحكم يجب أن تكون رتبة المصفوفة c تساوي n درجة النظام $rank(c) = n$. بشكل عام: يكون النظام غير قابل للتحكم عندما يكون على الأقل أحد متحولات الحالة مستقل عن إشارة الدخل.

مصفوفة اختبار قابلية المراقبة

$$o = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

حتى يكون النظام قابل للمراقبة يجب أن تكون رتبة المصفوفة o تساوي n درجة النظام $rank(o) = n$. يكون النظام غير قابل للمراقبة عندما يكون على الأقل أحد متحولات الحالة مستقل عن متحولات الخرج.

تماثل الشروط السابقة حالة الزمن المستمر باستبدال كل G بـ A وكل H بـ B.

يمكن تمثيل النظام القابل للتحكم و المراقبة بكثير حدود كسري لا يتشابه بسطه مع مقامه بأي حد كما يلي:

$$C(zI - G)^{-1}H + D = \frac{N(z)}{D(z)}$$

و تكون جذور المصفوفة G تساوي جذور مقام تابع النقل $D(z)$ أي:

$$\det(zI - G) = D(z)$$

حيث أن:

$$(zI-G)^{-1}=\frac{adj(zI-G)}{\det(zI-G)}.$$

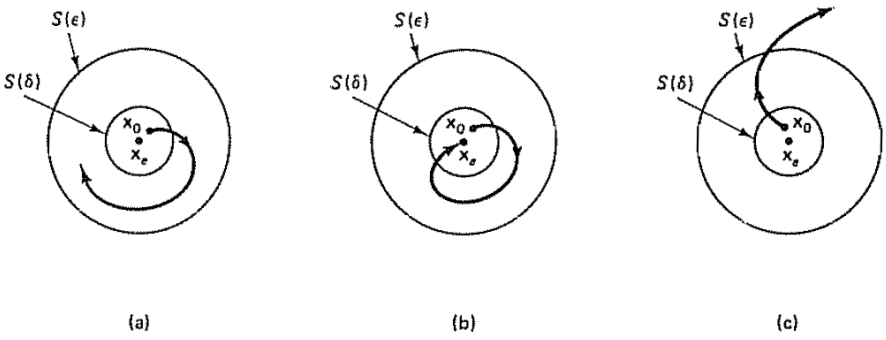
نظرية ليابونوف لاستقرار الأنظمة المتقطعة

تستخدم نظرية ليابونوف (Liapunov) أو (Lyapunov) الثانية (Second Method) لتحليل استقرار (Stability) الأنظمة المستمرة و المتقطعة الخطية و اللاخطية (Nonlinear) و تسمى أيضاً الطريقة المباشرة (Direct) لليابونوف. بالمقارنة مع نظرية ليابونوف الأولى لا تطلب نظريته الثانية حل معادلات تفاضلية لتحليل الاستقرار. أما بالمقارنة مع نظريات مثل جوري و روث فإنها تطبق ليس فقط على الأنظمة الثابتة بل أيضاً على الأنظمة المتغيرة زمنياً. تهتم هذه النظرية بدراسة استقرار حالة التوازن (Equilibrium State) للنظام. بالمقارنة مع الزمن المستمر نأخذ في الزمن المتقطع بدل التفاضل قيمة الفرق أي $V(x)\to V(x(k)),V(x)\to\dot{V}(x)\to\Delta V(x(k))$ حيث:

$$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))$$

مفهوم الاستقرار حسب ليابونوف

يوضح المخطط التالي مفهوم الاستقرار حسب ليابونوف:



الشكل (1) مفهوم الاستقرار حسب ليابونوف

a مستقر استقراراً مقارباً Asymptotic Stable

b مستقر استقراراً مقارباً على الواسع Asymptotic Stable in The Large

c غير مستقر Instable

نص النظرية

بفرض لدينا النظام المتقطع في فضاء الحالة التالي:

$$x(k+1)=f(x(k))$$

حيث x شعاع فضاء الحالة ببعد n.

$f(x)$ شعاع ببعد n له خاصية $f(0)=0$.

$kT_s\to k,(k+1)T_s\to k+1$ حيث T_s خطوة التقطيع.

نفرض وجود تابع سلمي موجب (Positive definite scalar function) $V(x)$ و الفرق $\Delta V(x)$ يحققان الشروط التالية:

1. التابع $V(x)\rangle 0 \quad for \quad x \neq 0$

2. التابع $\Delta V(x)\langle 0 \quad for \quad x \neq 0$ حيث:

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = V(f(x(k))) - V(x(k))$$

3. $V(0) = 0$

4. $V(x) \to \infty = 0 \quad as \quad \|x\| \to \infty$

إذا تحققت الشروط السابقة جميعها نقول أن حالة التوازن $x = 0$ مستقرة استقراراً مقارباً على الواسع.

بالنسبة للشرط الثاني يمكن أن يستبدل بـ إذا كان $\Delta V(x) \leq 0 \quad for \quad all \ x$ و كان $\Delta V(x)$ لا يتلاشى بصورة متطابقة (does not vanish identically) من أجل أي $\{x(kT_s)\}$ تحقق معادلة الحالة المتقطعة.

نورد فيما يلي أمثلة عن تحديد إشارة تابع:

1. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$	positive definite
2. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 + x_2^2}$	positive definite
3. $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$	positive semidefinite
4. $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (x_1 + x_2)^2$	negative definite
5. $V(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2^2$	indefinite

نظرية ليابونوف لاستقرار الأنظمة الخطية المتقطعة في فضاء الحالة

بفرض لدينا النظام المتقطع في فضاء الحالة التالي:

$$x(k+1) = Gx(k)$$

حيث x شعاع فضاء الحالة ببعد n و G مصفوفة الحالة ثابتة مع الزمن بأبعاد $n \times n$ و غير مفردة (Nonsingular). يمثل المركز (Origin) $x = 0$ حالة الاتزان (Equilibrium state) يمكن تحليل استقرار حالة الاتزان حسب النظرية الثانية لليابونوف كما يلي:

نختار فرضاً تابع ليابونوف بالشكل التربيعي (Quadratic Form) كما يلي:

$$V(x(k)) = x^*(k)\mathrm{P}x(k)$$

حيث P مصفوفة موجبة متناظرة قطرياً (Symmetric) عناصرها حقيقية و $(*)$ منقول مصفوفة. نحسب الفرق التالي:

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^*(k+1)\mathrm{P}x(k+1) - x^*(k)\mathrm{P}x(k)$$
$$= [Gx(k)]^*\mathrm{P}[Gx(k)] - x^*(k)\mathrm{P}x(k) = x^*(k)G^*\mathrm{P}Gx(k) - x^*(k)\mathrm{P}x(k)$$
$$= x^*(k)(G^*\mathrm{P}G - \mathrm{P})x(k)$$

بما أن التابع $V(x(k))$ موجب يجب أن يكون $\Delta V(x(k))$ سالب حتى تكون نقطة التوازن مستقرة استقراراً مقارباً و هكذا:

$$\Delta V(x(k)) = -x^*(k)Qx(k)$$

حيث: $Q = -(G^{*}\mathrm{P}G - \mathrm{P})$ مصفوفة موجبة (Positive definite).

بالتالي من أجل اختبار الاستقرار حسب ليابونوف نفرض أولاً مصفوفة موجبة Q ثم نوجد المصفوفة P من حل معادلة ليابونوف التالية:

$$G^{*}\mathrm{P}G - \mathrm{P} = -Q$$

تكون نقطة التوازن مستقرة استقراراً مقارباً على الواسع (Asymptotically stable in the large) إذا كانت المصفوفة المحسوبة P موجبة. يتم اختبار إشارة المصفوفة باستخدام معيار سلفستر(Sylvester Criterion).

يسمى التابع السلمي (Scalar) $V(x(k)) = x^{*}(k)\mathrm{P}x(k)$ بتابع ليابونوف لهذا النظام.

للمقارنة مع الأنظمة المستمرة الخطية:

معادلة فراغ الحالة:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

تابع ليابونوف من الشكل التربيعي:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{*}\mathbf{P}\mathbf{x}$$

مشتق تابع ليابونوف:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{*}\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

معادلة ليابونوف في الأنظمة الخطية:

$$\mathbf{A}^{*}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

أو

$$\mathbf{A}^{*}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

معيار سلفستر:

من أجل أن تكون المصفوفة المتناظرة قطرياً:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{p}_{1n} & \overline{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

موجبة يجب أن تحقق المحددات الأصغرية المتراجحات التالية:

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \overline{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{p}_{1n} & \overline{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

مثال 1:

لنأخذ النظام التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

حدد استقرار نقطة المركز (Origin) لهذا النظام.

الحل:

لنختر المصفوفة الواحدية (Identity Matrix) $Q = I$ بالتعويض في معادلة ليابونوف $G^*\mathrm{P}G - \mathrm{P} = -I$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

يمكن حل المعادلة المصفوفية السابقة كما يلي:

$$0.25p_{22} - p_{11} = -1$$
$$0.5(-p_{12} + p_{22}) - p_{12} = 0$$
$$p_{11} - 2p_{12} = -1$$

بالحل المشترك للمعادلات السابقة نجد: $p_{11} = \frac{11}{5}, p_{12} = \frac{8}{5}, p_{22} = \frac{24}{5}$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

بتطبيق معيار سلفستر (Sylvester Criterion):

$$p_{11} = \frac{11}{5} \rangle 0$$
$$\begin{vmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{vmatrix} = \frac{11}{5}\frac{24}{5} - \frac{8}{5}\frac{8}{5} \rangle 0$$

نجد أن المصفوفة P موجبة و المركز $x = (0,0)$ مستقر استقراراً مقارباً على الواسع.

يعطى تابع ليابونوف بالعلاقة التالية:

$$V(x(k)) = x^*\mathrm{P}x = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

أما $\Delta V(x(k))$ فيعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta V(x(k)) = -x^*Qx = -\begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

التحكم بإزاحة الجذور في فضاء الحالة

(Pole Placement Control in State-Space)

سنقوم في هذه الفقرة بدراسة التحكم في فضاء الحالة في الزمن المتقطع. سنعالج طريقة التحكم بإزاحة جذور (Pole Placement) النظام بالحلقة المغلقة عن طريق التغذية العكسية السالبة بشعاع الحالة (State Vector) مضروباً بمصفوفة ربح (Gain Matrix). سنقدم عدة طرق لإيجاد مصفوفة الربح مع أمثلة عن كل منها.

تسمى هذه الطريقة إزاحة الجذور و نفترض أن جميع متحولات الحالة قابلة للقياس (Measurable) أو متوفرة (Available) من أجل التغذية العكسية. نفترض أيضاً أن النظام قابل للتحكم بالنسبة لجميع متحولات الحالة (Completely state Controllable). عندئذ يمكن أن تتوضع جذور الحلقة المغلقة في أي مكان مرغوب عن طريق التغذية العكسية بمتحولات الحالة عبر مصفوفة الربح.

الشرط اللازم و الكافي لتوضع عشوائي (Arbitrary Location) لجذور الحلقة المغلقة

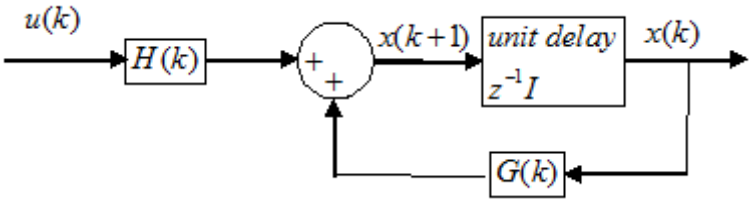
بفرض لدينا النظام بفضاء الحالة في الزمن المتقطع التالي:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

حيث $x(k)$ شعاع فضاء الحالة بالبعد n و k لحظة التقطيع. $u(k)$ إشارة التحكم و هي مقدار سلمي (Scalar).

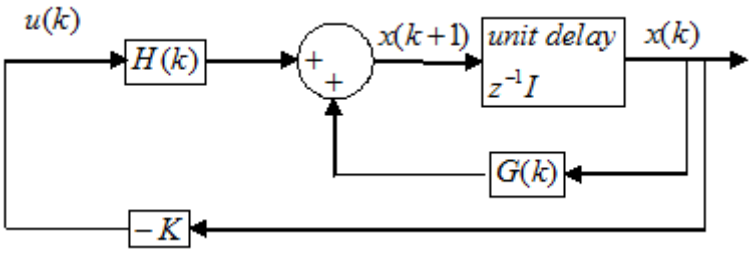
$G_{n\times n}$ مصفوفة الحالة، $H_{n\times 1}$ شعاع التحكم.

التمثيل بفضاء الحالة موضح بالشكل (2) التالي:



الشكل (2) التمثيل بفضاء الحالة للنظام

أما الشكل (3) التالي فيوضح النظام مع تغذية عكسية في فضاء الحالة.



الشكل (3) النظام بحلقة مغلقة في فضاء الحالة

نفرض أن إشارة التحكم غير مقيدة بحدود (Unbounded) عندها تعطى بالعلاقة التالية:

$$u(k) = -Kx(k)$$

حيث $K_{1\times n}$ مصفوفة ربح التغذية العكسية.

تعطى معادلة الحالة للحلقة المغلقة إذن بـ:

$$x(k+1) = (G - HK)x(k)$$

إن قيم جذور الحلقة المغلقة تتعلق بقيمة مصفوفة الربح K من المعادلة المميزة التالية للنظام بحلقة مغلقة.

$$|zI - (G - HK)| = 0$$

لذلك فأنه من الممكن اختيار قيمة الربح المناسب لتوضع مرغوب لجذور الحلقة المغلقة في الأماكن $z = \mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots, \mu_n$ حيث عدد الجذور يساوي درجة النظام.

نقبل بدون برهان **النظرية التالية:**

إن الشرط اللازم و الكافي للتحكم بمواضع جذور الحلقة المغلقة في أماكن محددة سلفاً هو أن يكون النظام قابل للتحكم بجميع متحولات الحالة له.

إيجاد مصفوفة الربح K

بالتحويل للصيغة القانونية

نفرض أن جذور الحلقة المغلقة (القيم المميزة) $z = \mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots, \mu_n$ و أن المعادلة المميزة للنظام بدون تحكم

$$|zI - G| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots a_{n-1} z^1 + a_n = 0$$

سنقوم بإجراء تحويل خطي للحصول على الصيغة القانونية القابلة للتحكم بوساطة T مصفوفة التحويل (Tranformation Matrix) كما يلي:

$$T = MW$$

$$M = [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحالة في فضاء الحالة الجديد بالصيغة القانونية القابلة للتحكم:

$$\hat{G} = T^{-1}GT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة التحكم:

$$\hat{H} = T^{-1}H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إشارة التحكم في فضاء الحالة الأصلي $u(k) = -Kx(k)$ أما في فضاء الحالة الجديد:

$$u(k) = -\hat{K}\hat{x}(k) = -KTx(k)$$

و يكون ربح التغذية العكسية في فضاء الحالة الأصلي محسوباً من العلاقة التالية:

$$K = \hat{K}T^{-1} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

حيث قيم α, a, T معلومة.

6-2-3-2 صيغة آكيرمان (Ackermann)

تعتمد هذه الطريقة في حساب مصفوفة الربح على العلاقة التالية (تقبل بدون برهان بهدف التبسيط)

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][H \quad GH \quad G^2H \quad \cdots \quad G^{n-1}H]^{-1}\phi(G)$$

و هي علاقة Ackermann.

حيث G مصفوفة فضاء الحالة و H شعاع التحكم و $\phi(G)$ مصفوفة تحسب بالعلاقة التالية:

$$\phi(G) = G^n + \alpha_1 G^{n-1} + \alpha_2 G^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}G + \alpha_n I = 0$$

تعتمد العلاقة الأخيرة على نظرية Cayley-Hamilton حيث تحقق مصفوفة الحالة لنظام ما المعادلة المميزة للحلقة المغلقة أي $z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots \alpha_{n-1}z + \alpha_n = 0$ باستبدال كل z بـ G.

ملاحظات:

يحدد الربح K بحيث أن الخطأ المسبب بتأثير الاضطراب سيتناقص إلى الصفر بسرعة كافية.

مصفوفة الربح ليست وحيدة و تتبع قيمتها لمواقع جذور الحلقة المغلقة المرغوبة.

عند اختيار مواقع جذور الحلقة المغلقة يجب إيجاد مقاربة بين سرعة الاستجابة و الحساسية تجاه الاضطراب و التشويش. بالتالي كلما كانت سرعة الاستجابة كبيرة زادت الحساسية للاضطراب و التشويش.

عند حساب ربح التغذية يتم تجريب عدة خيارات ثم انتقاء الأفضل من حيث الأداء.

إن العلاقات السابقة لحساب الربح ليست وحيدة بل يوجد علاقات أخرى سنذكر بعضاً منها فيما يلي و ذلك بملخص مبسط دون الخوض بالتفاصيل.

6-2-3-3 ملخص طرق أيجاد مصفوفة الربح:

بعد اختيار جذور الحلقة المغلقة يوجد عدة طرق لحساب مصفوفة ربح التغذية العكسية و ذلك كما يلي:

1. باستخدام العلاقة $K = \hat{K}T^{-1} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]T^{-1}$

أو $K = \hat{K}T^{-1} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1](MW)^{-1}$ حيث نحتاج لكل من M, W. حيث المعادلة المميزة للنظام بدون تحكم

$$|zI - G| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots a_{n-1} z^1 + a_n = 0$$

أما النظام بحلقة مغلقة:

$$|zI - G + HK| =$$
$$(z-\mu_1)(z-\mu_2)\cdots(z-\mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

إذا كان النظام أساساً بالصيغة القانونية فإننا نعوض $T = T^{-1} = I$.

2. باستخدام علاقة Ackermann

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][H \quad GH \quad G^2H \quad \cdots \quad G^{n-1}H]^{-1}\phi(G)$$
$$\phi(G) = G^n + \alpha_1 G^{n-1} + \alpha_2 G^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} G + \alpha_n I = 0$$

3. إذا كانت الجذور (Eigenvalues) المرغوبة للحلقة المغلقة $z = \mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots, \mu_n$ فإن الربح يعطى بالعلاقة التالية:

$$K = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1][\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n]^{-1}$$

حيث: $\zeta_i = (G - \mu_i I)^{-1} H, i = 1,2,...n$ الأشعة المميزة (Eigenvectors) للمصفوفة $G - HK$ أي تحقق المعادلات $(G - HK)\zeta_i = \mu_i \zeta_i, i = 1,2,...n$.

يوجد حالة خاصة تسمى استجابة (Deadbeat) أو تحكم (Deadbeat) و تنفرد فيه الأنظمة المتقطعة زمنياً و لا يوجد في الأنظمة المستمرة. في هذه الحالة نثبت جذور النظام بحلقة مغلقة في المركز أي $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = 0$. عندها $\zeta_i = (G)^{-i} H, i = 1,2,...n$ أي:

$$\zeta_1 = (G)^{-1} H, \zeta_2 = (G)^{-2} H, \zeta_3 = (G)^{-3} H, \cdots \zeta_n = (G)^{-n} H$$ و
$$K = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0][\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n]^{-1}$$

أما في الطريقة الأولى فيصبح:

$$K = [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1]T^{-1}$$

4. إذا كانت درجة (Order) النظام n منخفضة نعوض $K = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_n]$ في المعادلة المميزة للحلقة المغلقة ثم بمساواة أمثال الحدود المتشابهة لطرفي المعادلة نوجد مجموعة معادلات المجهول فيها هي مركبات مصفوفة الربح.

$$|zI - G + HK| =$$
$$(z-\mu_1)(z-\mu_2)\cdots(z-\mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0$$

مثال 2:

سنورد المثال التالي الذي من خلاله سنطبق الطرق الأربعة السابق ذكرها لإيجاد مصفوفة ربح التغذية العكسية. الهدف هو التحكم بمواقع جذور الحلقة المغلقة للنظام التالي:

$$G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

و ذلك في المواقع التالية $z=0.5+j0.5,\quad z=0.5-j0.5$

الحل:

نكتب المعادلة المميزة للنظام بدون تحكم كما يلي:

$$|zI-G|=\begin{vmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{vmatrix}=z^2+z+0.16=0\Rightarrow a_1=1, a_2=0.16$$

المعادلة المميزة للنظام بحلقة مغلقة:

$$|zI-G+HK|=(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)$$
$$=z^2-z+0.5=0\Rightarrow \alpha_1=-1, \alpha_2=0.5$$

نختبر قابلية التحكم للنظام:

مصفوفة قابلية التحكم $[H \quad GH]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و هي مصفوفة غير مفردة (مستقلة خطياً) و رتبة المصفوفة تساوي 2. أي أن النظام قابل للتحكم بكافة متحولات الحالة و هو الشرط اللازم و الكافي للتحكم بمواقع جذور الحلقة المغلقة بشكل عشوائي.

سنستخدم أربعة طرق في إيجاد مصفوفة التحكم كما يلي:

1. باستخدام العلاقة $K=[\alpha_2-a_2 \quad \alpha_1-a_1]T^{-1}$ حيث أن النظام أساساً بالصيغة القانونية القابلة للتحكم نعوض $T^{-1}=T=I$ و السبب أن:

$$T=MW=[H \quad GH]\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

أي: $K=[0.5-0.16 \quad -1-1]=[0.34 \quad -2]$

2. باستخدام علاقة Ackermann

$$K=[0 \quad 1][H \quad GH]^{-1}\phi(G)$$

$$K=\phi(G)=G^2-G+0.5I=\begin{bmatrix}-0.16 & -1\\ 0.16 & 0.84\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.34 & -2\\ 0.32 & 2.34\end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 1]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.34 & -2\\ 0.32 & 2.34\end{bmatrix}$$

$$K=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.34 & -2\\ 0.32 & 2.34\end{bmatrix}=[0.34 \quad -2]$$

3. الجذور المرغوبة للحلقة المغلقة $\mu_1=0.5+j0.5, \mu_2=0.5-j0.5$ و الربح يعطى بالعلاقة التالية $K=[1 \quad 1][\zeta_1 \quad \zeta_2]^{-1}$.

حيث:

$$\zeta_1 = [G-(0.5+j0.5)I]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.5-j0.5 & 1\\ -0.16 & -1.5-j0.5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{-1}{0.66+j}\\ \dfrac{-0.5-j0.5}{0.66+j}\end{bmatrix}$$

$$\zeta_2 = [G-(0.5-j0.5)I]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.5+j0.5 & 1\\ -0.16 & -1.5+j0.5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{-1}{0.66-j}\\ \dfrac{-0.5+j0.5}{0.66-j}\end{bmatrix}$$

$$[\zeta_1 \quad \zeta_2]^{-1} = \begin{bmatrix}\dfrac{-1}{0.66+j} & \dfrac{-1}{0.66-j}\\ \dfrac{-0.5-j0.5}{0.66+j} & \dfrac{-0.5+j0.5}{0.66-j}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix}\dfrac{0.7178(1-j)}{1+j0.66} & \dfrac{-1.4356}{1+j0.66}\\ \dfrac{-0.7178(1+j)}{-1+j0.66} & \dfrac{1.4356}{-1+j0.66}\end{vmatrix}$$

$$K = [1 \quad 1][\zeta_1 \quad \zeta_2]^{-1} = [1 \quad 1]\begin{vmatrix}\dfrac{0.7178(1-j)}{1+j0.66} & \dfrac{-1.4356}{1+j0.66}\\ \dfrac{-0.7178(1+j)}{-1+j0.66} & \dfrac{1.4356}{-1+j0.66}\end{vmatrix}$$

$$K = [0.34 \quad -2]$$

4. درجة النظام $n=2$ منخفضة نعوض $K=[K_1 \quad K_2]$ في المعادلة المميزة للحلقة المغلقة ثم بمساواة أمثال الحدود المتشابهة لطرفي المعادلة نوجد مجموعة معادلات المجهول فيها هي مركبات مصفوفة الربح.

$$|zI-G+HK| = \left|z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[K_1 \quad K_2]\right|$$

$$= \begin{vmatrix}z & -1\\ 0.16+K_1 & z+1+K_2\end{vmatrix} = z^2+(1+K_2)z+0.16+K_1 = 0$$

بمساواة هذه النتيجة بالعلاقة التالية:

$$|zI-G+HK| = (z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5) = z^2-z+0.5 = 0$$

$$z^2-z+0.5 = z^2+(1+K_2)z+0.16+K_1 = 0$$

ينتج:

$$0.16+K_1=0.5\Rightarrow K_1=0.34$$
$$1+K_2=-1\Rightarrow K_2=-2$$

بالتالي:

$$K=\begin{bmatrix}0.34 & -2\end{bmatrix}$$

حساب ربح المتحكم من أجل استجابة (Deadbeat)

يوجد هذا التصميم فقط في الأنظمة في الزمن المتقطع (Unique) و لا يمكن أن يوجد في أنظمة الزمن المستمر. في هذا التحكم سيتناقص مطال (Magnitude) شعاع الخطأ (Error) إلى الصفر عند لحظة التقطيع المساوية لدرجة النظام n أو أقل و ذلك إذا كانت إشارة التحكم غير مقيدة بحدود (Unbounded). هذا يعني أن زمن الوصول للحالة المستقرة سيتناقص بتصغير خطوة التقطيع. لكن ذلك يعني إشارة تحكم ذات مطال كبير جداً و هذا غير مرغوب فيه في أنظمة التحكم. تعتبر خطوة التقطيع العامل الوحيد في تصميم المتحكم (Deadbeat) و يجب الانتباه عند اختيارها. في حال كون إشارة التحكم كبيرة فإن أثر الإشباع (Saturation Phenomenon) سيظهر بالتالي لن يعد بالإمكان الحصول على استجابة (Deadbeat) و سيكون زمن الوصول للحالة المستقرة أكبر من n خطوة تقطيع.

مثال3:

بالنسبة للنظام في فضاء الحالة التالي:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

حدد مصفوفة الربح اللازمة للحصول على استجابة من النوع Deadbeat للنظام بحلقة مغلقة و ذلك بفرض أن إشارة التحكم $u(k)=-Kx(k)$ غير مقيدة بحدود.

الحل:

تعطى مصفوفة الربح في حالة الاستجابة المرغوبة من نوع Deadbeat بالعلاقة التالية:

$$K=\begin{bmatrix}-a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}T^{-1}$$
$$K=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_1\end{bmatrix}T^{-1}$$

إن النظام أعلاه بالصيغة القانونية القابلة للتحكم أي أن $T=T^{-1}=I$

$$[zI-G]=\left\|\begin{bmatrix}z & 0\\0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}z & -1\\0.16 & z+1\end{bmatrix}\right\|$$
$$=z^2+z+0.16=0=z^2+a_1z+a_2$$

أي أن:

$$K=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_1\end{bmatrix}I=\begin{bmatrix}-0.16 & -1\end{bmatrix}$$

تصل قيمة متحولات الحالة للصفر (نقطة التوازن $x(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$) بعد 2 خطوة تقطيع $k=2=n$ من أي حالة ابتدائية عشوائية.

للتأكد مما سبق نجري التحليل التالي:

معادلة الحلقة المغلقة:

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.16 & -1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

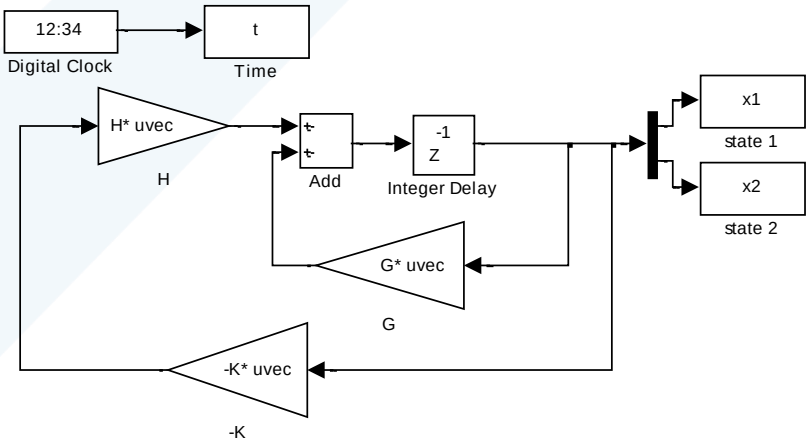
نفرض حالة ابتدائية معلومة $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ فيكون:

$$\begin{bmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(2)\\x_2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(1)\\x_2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

أي أن استجابة النظام تصبح صفراً ابتداءً من الخطوة الثانية $x(k)=0, k=2,3,\cdots$.

يبين الشكل (4) التالي مخطط النمذجة و المحاكاة باستخدام برنامج MATLAB.

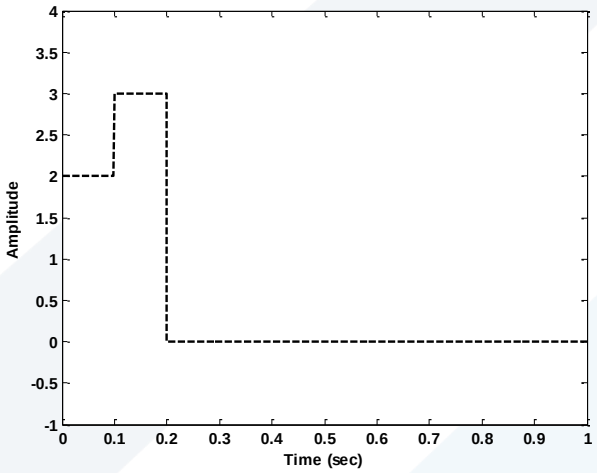


الشكل (4) مخطط النمذجة و المحاكاة للنظام

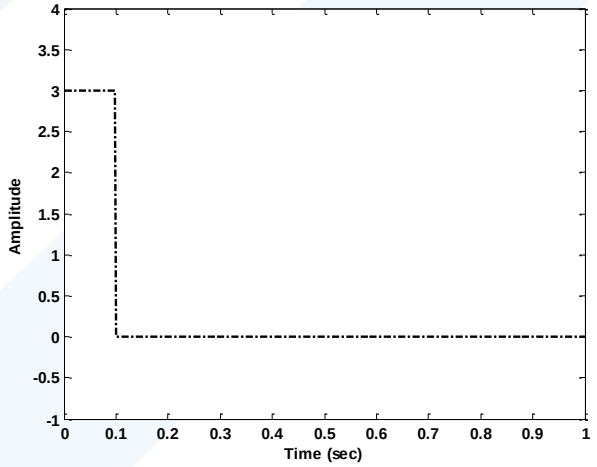
تتم المحاكاة بالشروط الابتدائية (Initial State) التالية و بخطوة التقطيع $0.1[\text{sec}]$.

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T_s=0.1[\text{sec}]$$

تظهر النتائج على الأشكال التالية الاستجابة الزمنية المستمرة لمتحولي الحالة x_1, x_2 و نلاحظ أن قيمة x_1 تصبح منعدمة بعد خطوة التقطيع الثانية $k = n = 2$ الشكل (6-11). بينما تصبح قيمة x_2 منعدمة بعد خطوة التقطيع الأولى $k = 1\langle n$ الشكل (5).



الشكل (5) الاستجابة الزمنية المتقطعة لـ x_1



الشكل (6) الاستجابة الزمنية المتقطعة لـ x_2

ورد فيما سبق بأن وضع جذور الحلقة المغلقة في المركز أي أصفاراً جميعها يؤدي للحصول على استجابة من النوع Deadbeat سنبرهن فيما يلي صحة ذلك الطرح.

تصميم التحكم عند دخل مرجعي

فيما سبق تعاملنا مع الأنظمة التي يسبب الاضطراب (Disturbance) فيها تغيراً في حالة النظام و يكون دور المتحكم إعادة النظام إلى حالته الأصلية (Origin). تحدد المعادلة المميزة السرعة (Speed) التي بها تقترب متحولات الحالة من الحالة الأصلية. فيما يلي سنعتبر أن النظام يملك مرجعاً محدداً كدخل (Reference Input). لنعتبر أن النظام في الشكل (6-13) في فضاء الحالة يملك معادلة الفرق التالية:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

إشارة التحكم غير مقيدة بحدود و تعطى بالعلاقة التالية:

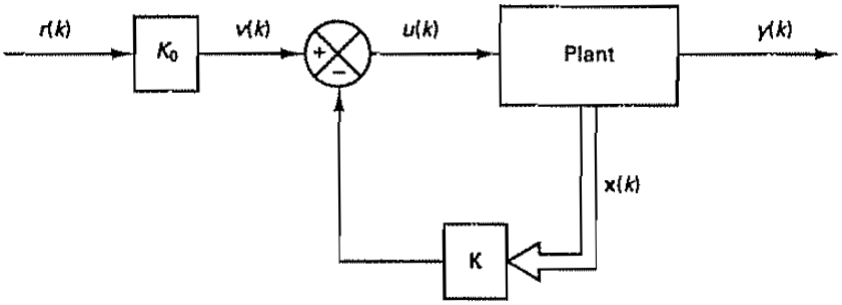
$$u(k) = K_0 r(k) - Kx(k)$$

بالتعويض في معادلة الحالة:

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + HK_0 r(k)$$

المعادلة المميزة للنظام بحلقة مغلقة:

$$|zI - G + HK| = 0$$



الشكل (6-13) نظام التحكم بالتغذية العكسية

كما ورد سابقاً إذا كان النظام قابل للتحكم بكل متحولاته يمكن التحكم بمواقع جذور الحلقة المغلقة بشكل عشوائي.

يجب الإشارة إلى أن التغذية العكسية تغير المعادلة المميزة للنظام و يتغير أيضاً ربح الحالة المستقرة. إذن يجب إيجاد ربح K_0 بحيث تكون استجابة النظام لدخل خطوة واحدية تساوي الواحد في الحالة المستقرة أو $y(\infty)=1$. من أجل التوضيح لنأخذ المثال التالي.

مثال 4:

ليكن النظام التالي في فضاء الحالة:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

صمم نظام التحكم بحيث تكون الجذور المرغوبة للحلقة المغلقة $z_1 = 0.5 + j0.5$ و $z_2 = 0.5 - j0.5$.

الحل:

لقد تم حساب الربح اللازم في الأمثلة السابقة $K = \begin{bmatrix} 0.34 & -2 \end{bmatrix}$ بالتالي تصبح معادلة الحالة للنظام بحلقة مغلقة مع مرجع:

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + HK_0 r(k)$$

$$x(k+1) = \hat{G}\,x(k) + \hat{H}\,r(k)$$

حيث $\hat{G} = (G - HK), \hat{H} = HK_0$

لإيجاد الربح K_0 يجب إيجاد تابع نقل النظام من العلاقة $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = C(zI - \hat{G})^{-1}\hat{H}$

حيث:

$$\hat{G} = (G - HK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.34 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & 1 \\ 0.5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

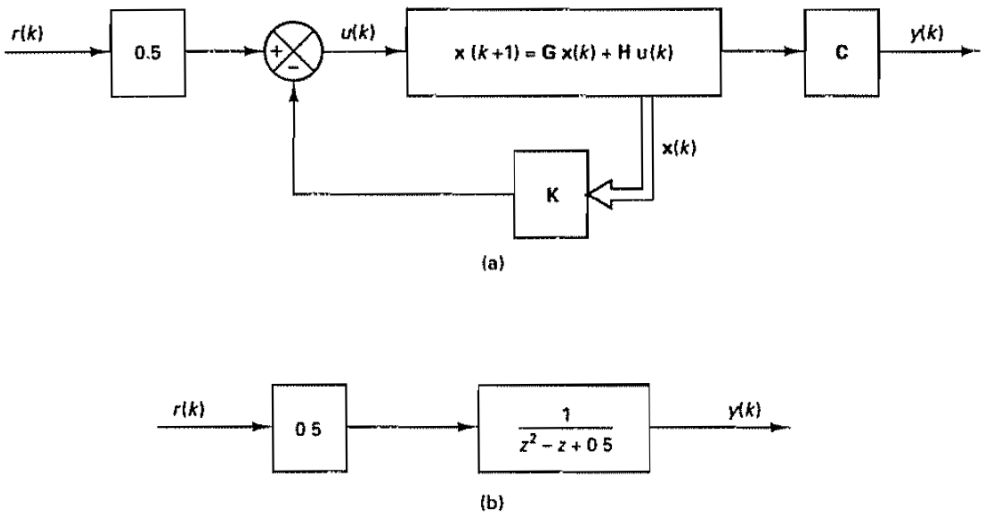
$$= \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z) = \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z)$$

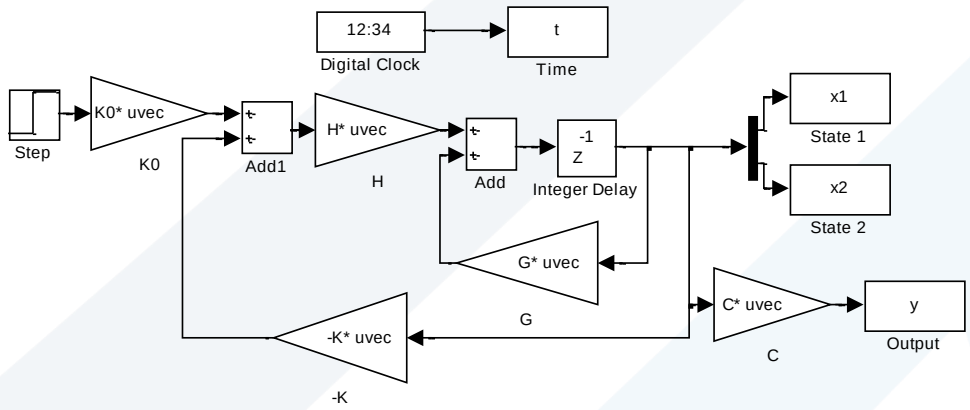
$$= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{K_0}{z^2 - z + 0.5} \frac{z}{z-1} = \frac{K_0}{0.5} = 1 \Rightarrow K_0 = 0.5$$

بالاعتماد على النتائج السابقة يمكن رسم المخطط الصندوقي التالي. حيث يمثل الشكل (a-7) المخطط الصندوقي للحلقة المغلقة بينما الشكل(b-7) يمثل تابع النقل المكافئ للحلقة المغلقة.



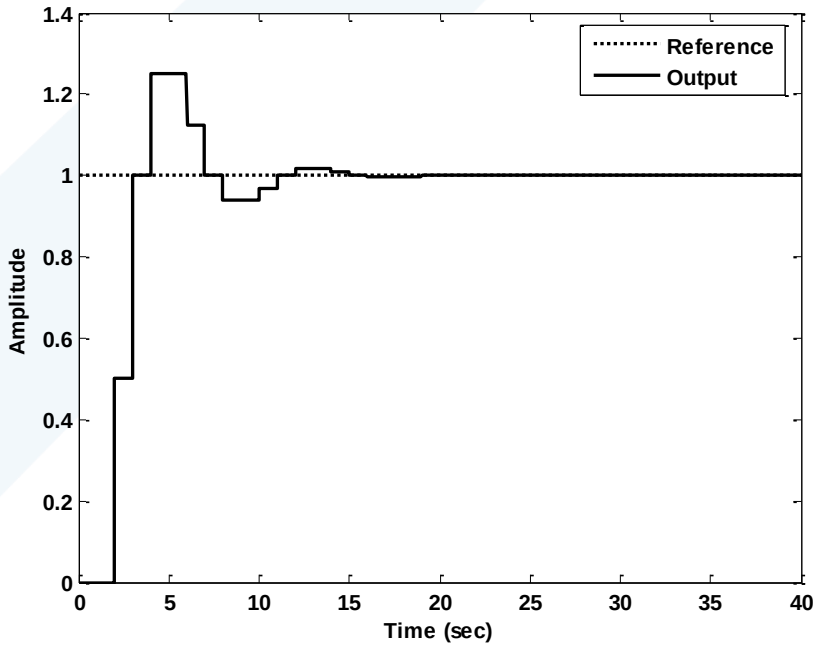
الشكل (7) نظام التحكم بالتغذية العكسية

سنقوم فيما يلي بمحاكاة استجابة النظام بحلقة مغلقة لدخل خطوة واحدية المخطط الصندوقي للمحاكاة موضح بالشكل (8) التالي:

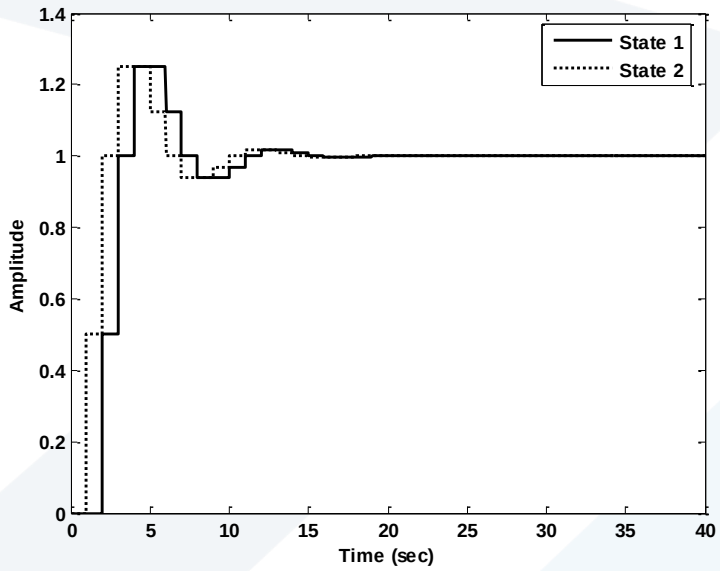


الشكل (8) مخطط المحاكاة باستخدام برنامج MATLAB

في الشكل (8) باعتبار خطوة التقطيع $T_s = 1$ و زمن المحاكاة $40[\text{sec}]$ تم الحصول على الاستجابة المطلوبة كما يبين الشكل (9) التالي. نلاحظ أن الخرج يتبع الدخل بخطأ حالة مستقرة معدوم و ذلك بفضل الربح K_0 بعد فترة عابرة محددة بتوضع جذور الحلقة المغلقة المرغوبة.



الشكل (9) استجابة الخرج في الزمن المستمر تجاه دخل خطوة واحدية



الشكل (10) استجابة متحولات الحالة في الزمن المستمر تجاه دخل خطوة واحدية