جامعة المنارة

قسم هندسة الميكاترونكس

الدارات الكهربائية 2

Electrical Circuits 2

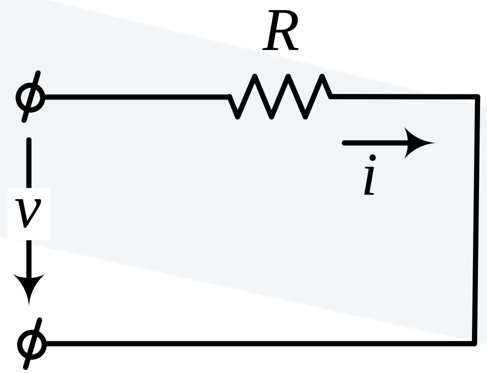
الدكتور المهندس

علاء الدين أحمد حسام الدين

2

الأشكال الأساسية لدارات التيار المتناوب:

1. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة أومية فقط :

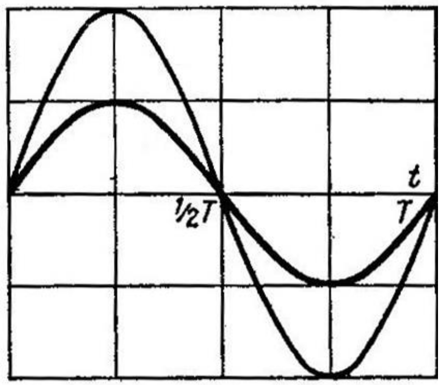


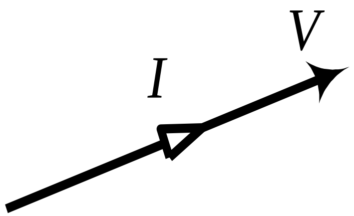
$$v = V_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \cdot \text{Sin}\omega t}{R} = I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

$$i = I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

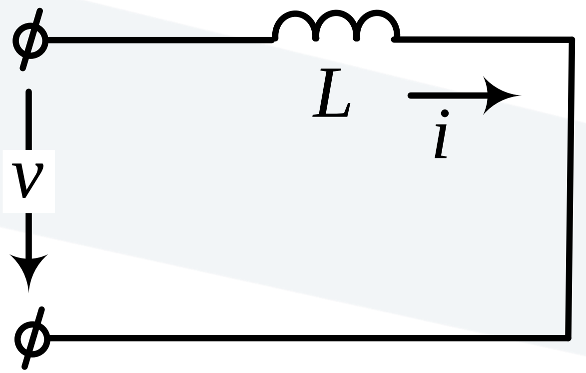
$$v = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \text{Sin}\omega t$$



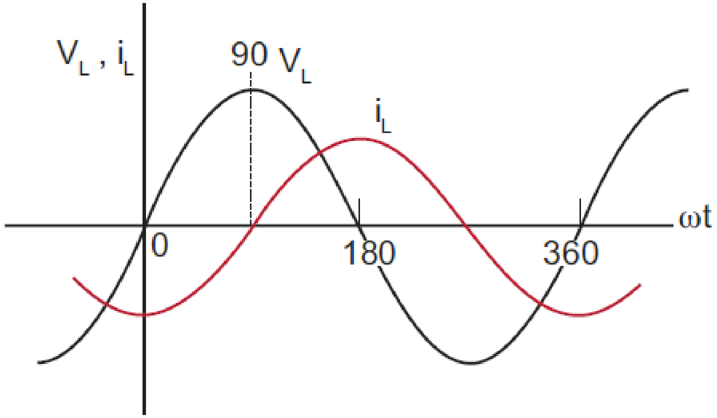


$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot I_m = 0.707 \cdot \frac{V_m}{R} = \frac{V}{R}$$

2. دارة كهربائية تحتوي على ملف فقط :



$$i = I_m \cdot Sin\omega t$$



$$e = -L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{d(I_m \cdot Sin\omega t)}{dt} = -L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Cos\omega t$$

$$e = -E_m \cdot Cos\omega t = E_m \cdot Sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$v + e = 0 \Rightarrow v = -e$$

$$\Rightarrow v = -(-L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Cos\omega t) = L \cdot I_m \cdot \omega \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = V_m \cdot Sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$V_m = E_m = I_m \cdot \omega \cdot L$$

* المفاعلة التحريضية:

يمكن من هذه العلاقة كتابة قانون أوم بالنسبة للقيم الأعظمية كما يأتي:

$$I_m = \frac{V_m}{\omega \cdot L} = \frac{V_m}{X_L}$$

يسمّى الجداء $X_L = \omega . L$ بالممانعة أو المفاعلة التحريضية للملف.

نقسم طرفي العلاقة الأخيرة على $\sqrt{2}$ فنحصل على قيمة قانون أوم بالنسبة للقيم الفعّالة:

أي أن:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2} \cdot \omega \cdot L} = \frac{V_m}{\sqrt{2} \cdot X_L} \Rightarrow I = \frac{V}{\omega \cdot L} = \frac{V}{X_L}$$

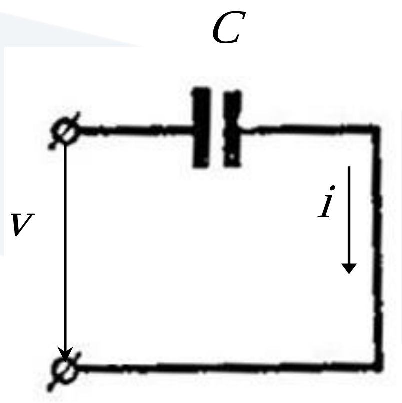
$$\frac{V}{I} = X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L$$

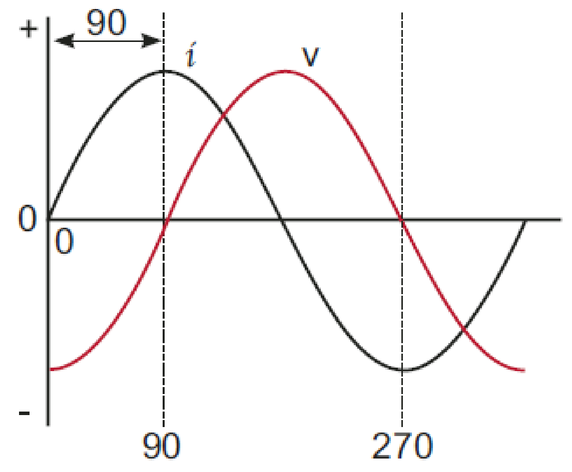
نلاحظ أن المفاعلة التحريضية تتناسب طرداً مع عامل التحريض الذاتي ومع التردد، وبالتالي تكون هذه المفاعلة في حالة التيار المستمر مساوية للصفر.

تُقاس المفاعلة التحريضية بواحدة $[\Omega]$، حيث:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L \Rightarrow [X_L] = [f] \cdot [L] = [\frac{1}{s}] \cdot [\Omega \cdot s] = [\Omega]$$

3. دارة كهربائية تحتوي على مكثف فقط:

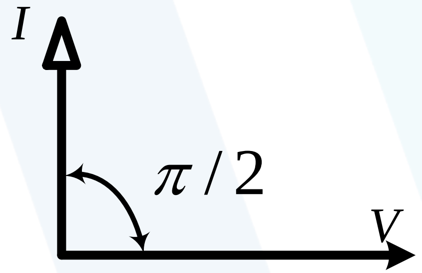




$$v = V_m \cdot \sin\omega t$$

$$q = C \cdot v = C \cdot V_m \cdot \sin\omega t$$

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt} \cdot (V_m \cdot \sin\omega t)$$
$$= C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \cos\omega t$$
$$\Rightarrow i = C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



* المفاعلة الردية (السعوية):

$$I_m = C\cdot\omega\cdot V_m \Rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{C\cdot\omega\cdot V_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = C\cdot\omega\cdot V = \frac{V}{\frac{1}{\omega\cdot C}} = \frac{V}{X_C} \quad \Rightarrow V = \frac{I}{\omega\cdot C} = X_C\cdot I$$

تمثل هذه العلاقة قانون أوم بالقيم الفعّالة للدارة الحاوية على مكثّف سعته C.

تسمّى القيمة X_C بالممانعة (المفاعلة) السعوية (الردّية) للمكثّف، ويعبرعنها بواحدة [Ω]، حيث:

$$[X_C] = \frac{1}{[f]\cdot[C]} = \frac{1}{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{\Omega}} = [\Omega]$$

نلاحظ من علاقة المفاعلة السعوية أنها تتناسب عكساً مع كلٍ من السعة وتردد التيار المتناوب.

فعند تغيّر التردد من $f=0$ حتى $f=\infty$ تتغيرهذه المفاعلة كم $X_C=\infty$ حتى $X_C=0$.

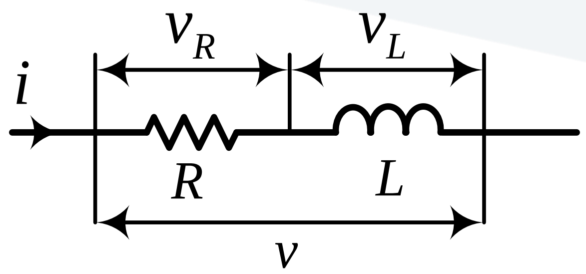
جدول يبين الجهد عبر كل عنصر في حالة مرور تيار متناوب جيبي:

العنصر	الجهد في حالة تيار عام i	الجهد في حالة تيار $i = I_m \cdot Sin\omega t$	الجهد في حالة تيار $i = I_m \cdot Cos\omega t$
مقاومة R	$v_R = R \cdot i$	$v_R = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t$	$v_R = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t$
ملف L	$v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$	$v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot Cos\omega t$	$v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot (-Sin\omega t)$
مكثّف C	$v_C = \frac{1}{C}\int i \cdot dt$	$v_C = \frac{I_m}{\omega \cdot C} \cdot (-Cos\omega t)$	$v_C = \frac{I_m}{\omega \cdot C} \cdot Sin\omega t$

جدول يبين التيار المار في كل عنصر في حالة تطبيق جهد جيبي:

العنصر	التيار نتيجة تطبيق جهد عام v	التيار نتيجة تطبيق جهد $v = V_m \cdot Sin\omega t$	التيار نتيجة تطبيق جهد $v = V_m \cdot Cos\omega t$
مقاومة R	$i_R = \frac{v}{R}$	$i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t$	$i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Cos\omega t$
ملف L	$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$	$i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t)$	$i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot Sin\omega t$
مكثّف C	$i_C = C \cdot \frac{dv}{dt}$	$i_C = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot Cos\omega t$	$i_C = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot (-Sin\omega t)$

4. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف بوصل تسلسلي (دارة R_L):



$$i = I_m \cdot \sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

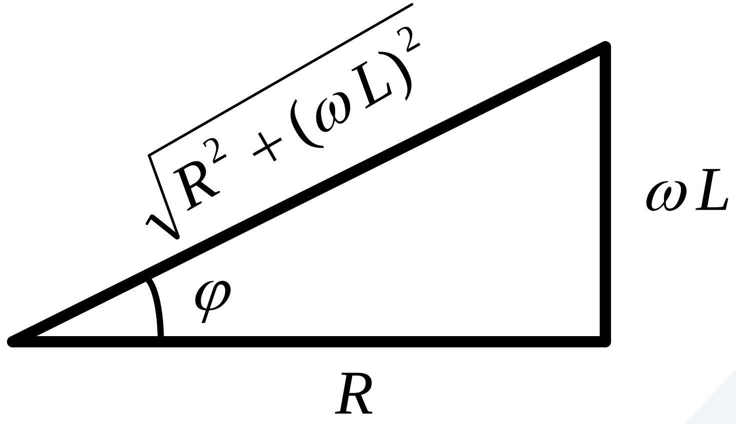
$$v = v_R + v_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \quad ، \quad v = R \cdot I_m \cdot \sin\omega t + L \cdot \frac{d}{dt} \cdot (I_m \cdot \sin\omega t)$$

$$v = R \cdot I_m \cdot \sin\omega t + L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t$$

معادلة الجهد هي من الشكل:

$$v = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \sin\omega t \cdot \cos\phi + A \cdot \cos\omega t \cdot \sin\phi$$

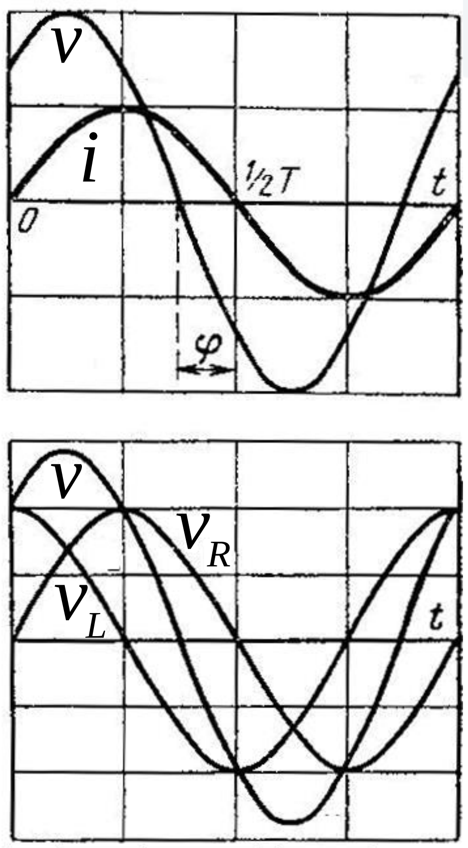
$$R \cdot I_m = A \cdot \cos\phi, L \cdot \omega \cdot I_m = A \cdot \sin\phi$$



$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\mathrm{Sin}\phi}{\mathrm{Cos}\phi} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \phi = \mathrm{arctg}(\frac{\omega L}{R})$$

$$\mathrm{Cos}\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{\mathrm{Cos}\phi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}}$$

$$\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2+(\omega L)^2} = I_m \cdot Z$$

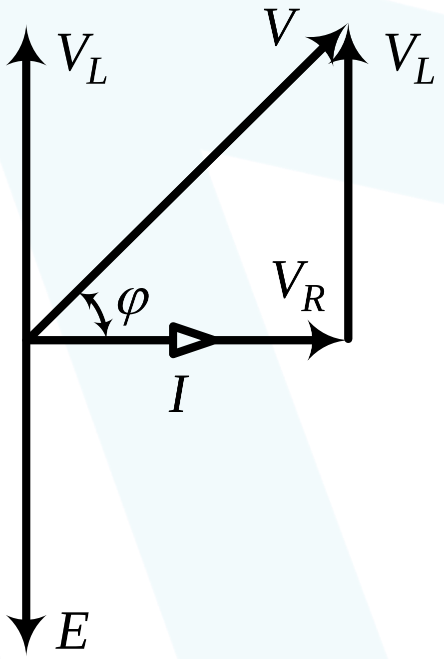


وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:

$$\mathbf{v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot Sin(\omega t + arctg(\frac{\omega L}{R}))}$$

أي أن التيار متأخر عن الجهد بمقدار

$$\boldsymbol{\phi = \mathbf{arctg}(\frac{\omega L}{R})}$$



جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

مناقشة:

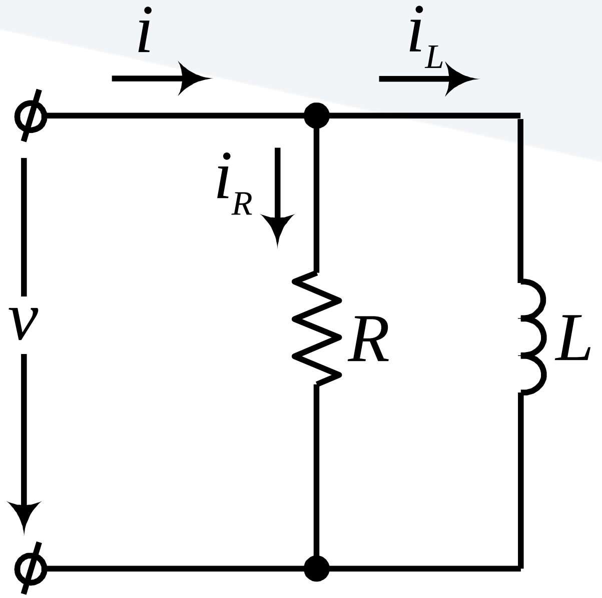
$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \mathrm{arctg}(\frac{\omega L}{R}))$$

- إذا كانت $R >> \omega L$ فإن $\frac{\omega L}{R} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة. $v_R = R \cdot I_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t$

- إذا كانت $R << \omega L$ فإن $\frac{\omega L}{R} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود ملف فقط في الدارة. $v_L = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \mathrm{Cos}\omega t$

إذاً يكون التيار في الدارات الحاوية على R و L متصلان تسلسلياً متأخراً عن الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωL

5. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف بوصل تفرعي (دارة RL):



$$v = V_m \cdot \sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$i = i_R + i_L = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \sin\omega t + \frac{1}{L} \int V_m \cdot \sin\omega t \cdot dt$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \sin\omega t + \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-\cos\omega t) \Rightarrow \quad i = \frac{V_m}{R} \cdot \sin\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot \cos\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة نتيجة تطبيق الجهد، هي من الشكل:

$$i = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$

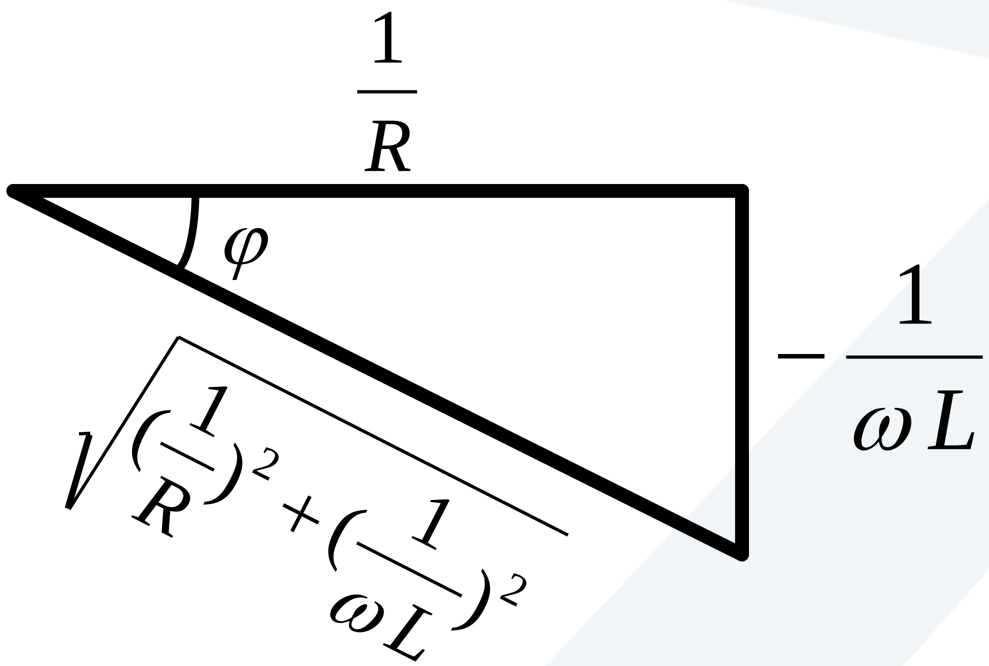
$$\frac{V_m}{R} = A \cdot \mathrm{Cos}\varphi \Rightarrow \mathrm{Cos}\varphi = \frac{V_m}{R \cdot A}, -\frac{V_m}{\omega \cdot L} = A \cdot \mathrm{Sin}\varphi \Rightarrow \mathrm{Sin}\varphi = -\frac{V_m}{\omega \cdot L \cdot A}$$

وبالتالي فإن:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\mathrm{Cos}\varphi} = -\frac{\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = -\frac{R}{\omega L} \Rightarrow \varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{R \cdot \mathrm{Cos}\varphi} = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}} = \frac{V_m}{Z}$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:



$$\mathbf{i = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega L})^2} \cdot Sin(\omega t - arctg(\frac{R}{\omega L}))}$$

أي أن التيار متأخر على الجهد بمقدار:

$$\boldsymbol{\varphi = arctg(\frac{R}{\omega L})}$$

مناقشة:

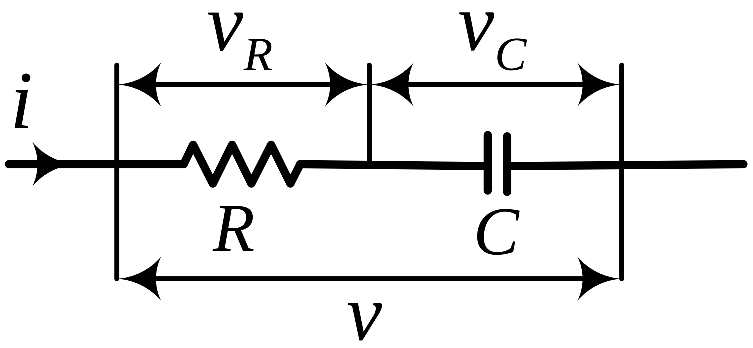
$$i = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega L})^2} \cdot Sin(\omega t - arctg(\frac{R}{\omega L}))$$

- إذا كانت $R << \omega L$ فإن $\frac{R}{\omega L} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة. $i_R = \frac{V_m}{R} \cdot Sin\omega t$
- إذا كانت $R >> \omega L$ فإن $\frac{R}{\omega L} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود ملف فقط في الدارة. $i_L = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-Cos\omega t)$

إذاً يكون التيارفي الدارات الحاوية على R و L متصلان تفرعياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωL

6. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة ومكثف بوصل تسلسلي (دارة RC):

$$i = I_m \cdot Cos\omega t$$



معادلة تشغيل الدارة:

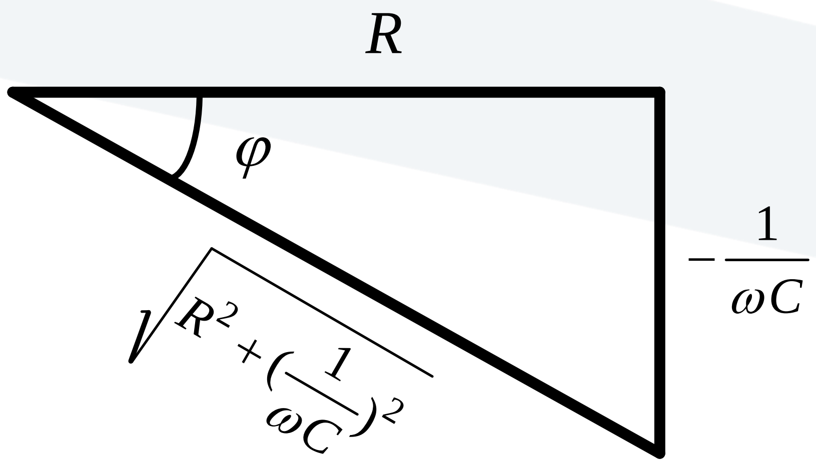
$$v = v_R + v_C = R \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t + \frac{1}{C}\int I_m \cdot Cos\omega t \cdot dt$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Cos\omega t + \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة الجهد، المفترض أن يكون مطبقاً، هي من الشكل:

$$v = A \cdot Cos(\omega t + \varphi) = A \cdot Cos\omega t \cdot Cos\varphi - A \cdot Sin\omega t \cdot Sin\varphi$$



$$R \cdot I_m = A \cdot Cos\varphi \quad , \quad \frac{1}{\omega C} \cdot I_m = -A \cdot Sin\phi$$

من مثلث الممانعات:

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega CR} \Rightarrow \varphi = -arctg(\frac{1}{\omega CR})$$

$$Cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{Cos\varphi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}}$$

$$\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = I_m . Z$$

وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:

$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \cdot Sin(\omega t - arctg(\frac{1}{\omega CR}))$$

أي أن التيارمتقدم على الجهد بمقدار:

$$\varphi = arctg(\frac{1}{\omega CR})$$

مناقشة:

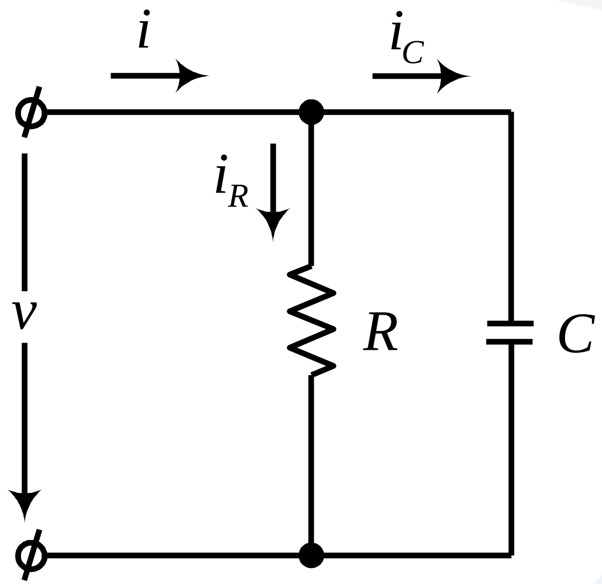
$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \mathrm{Sin}\left(\omega t - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right)$$

❖ إذا كانت $R >> \frac{1}{\omega C}$ فإن $\frac{1}{\omega CR} \to 0$ و $\varphi \to 0$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مقاومة أومية بحته فقط في الدارة.

❖ إذا كانت $R << \frac{1}{\omega C}$ فإن $\frac{1}{\omega CR} \to \infty$ و $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في حالة وجود مكثف فقط في الدارة.

إذاً يكون التيار في الدارات الحاوية على R و C متصلان تسلسلياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و $\frac{1}{\omega C}$

7. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة ومكثف بوصل تفرعي (دارة RC):



$$v = V_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

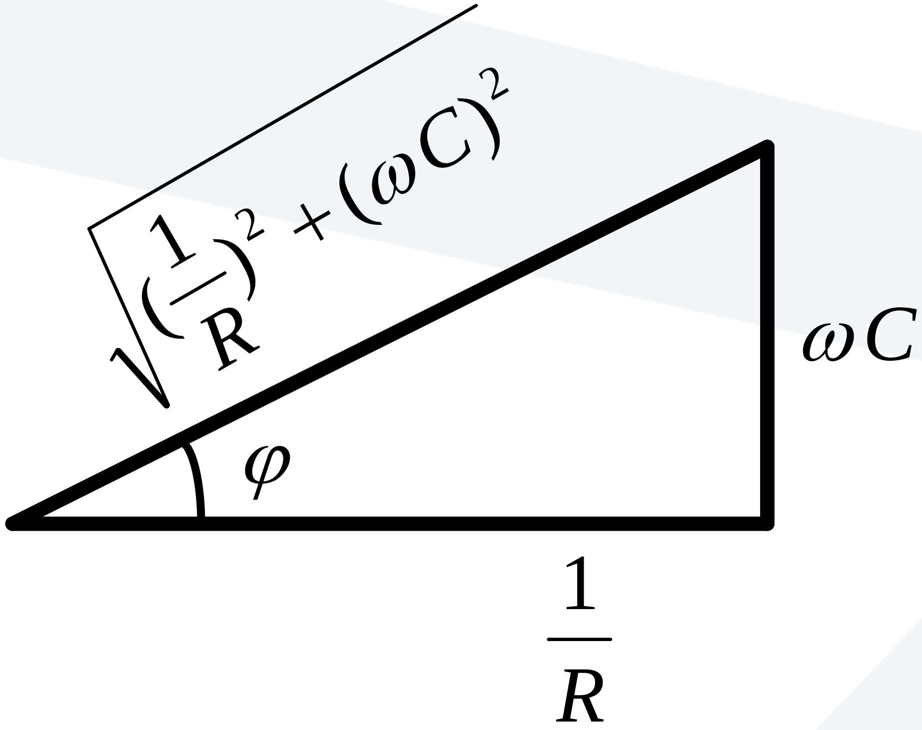
$$i = i_R + i_C = \frac{v}{R} + C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{V_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t}{R} + C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot \mathrm{Sin}\omega t)$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \mathrm{Sin}\omega t + C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \mathrm{Cos}\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$i = A \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi) = A \cdot \mathrm{Sin}\omega t \cdot \mathrm{Cos}\varphi + A \cdot \mathrm{Cos}\omega t \cdot \mathrm{Sin}\varphi$$



$$\frac{V_m}{R} = A \cdot Cos\varphi \Rightarrow Cos\varphi = \frac{V_m}{R \cdot A}$$

$$C \cdot \omega \cdot V_m = A \cdot Sin\varphi \Rightarrow Sin\varphi = \frac{C \cdot \omega \cdot V_m}{A}$$

وبالتالي فإن:

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \omega \cdot C \cdot R \Rightarrow \varphi = arctg(\omega \cdot C \cdot R)$$

$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C)^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{R \cdot Cos\varphi} = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C)^2}}} = \frac{V_m}{Z}$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:

$$i = V_m \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega \cdot C)^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \mathrm{arctg}(\omega \cdot C \cdot R))$$

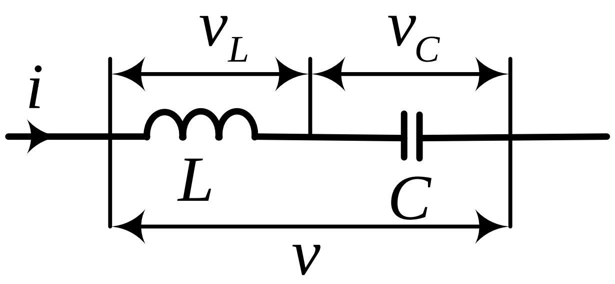
أي أن التيار متقدم على الجهد بمقدار:

$$\varphi = \mathrm{arctg}(\omega \cdot C \cdot R)$$

إذاً يكون التيار في الدارات الحاوية على R و C متصلان تفرعياً متقدماً على الجهد بزاوية تتراوح بين 0^o و 90^o حسب القيم النسبية لكلٍ من R و ωC

8. دارة كهربائية تحتوي على ملف ومكثف بوصل تسلسلي (دارة LC):

$$i = I_m \cdot \sin\omega t$$



معادلة تشغيل الدارة:

$$v = v_L + v_C = L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

$$v = L \cdot \frac{d}{dt} \cdot (I_m \cdot \sin\omega t) + \frac{1}{C} \cdot \int I_m \cdot \sin\omega t \cdot dt$$

$$v = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t + \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot (-\cos\omega t)$$

$$v = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\omega t - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot \cos\omega t \Rightarrow$$

$$v = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m \cdot \cos\omega t = V_m \cdot \cos\omega t$$

$$v = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m \cdot \mathrm{Cos}\omega t = V_m \cdot \mathrm{Cos}\omega t$$

$$v = V_m \cdot \mathrm{Sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

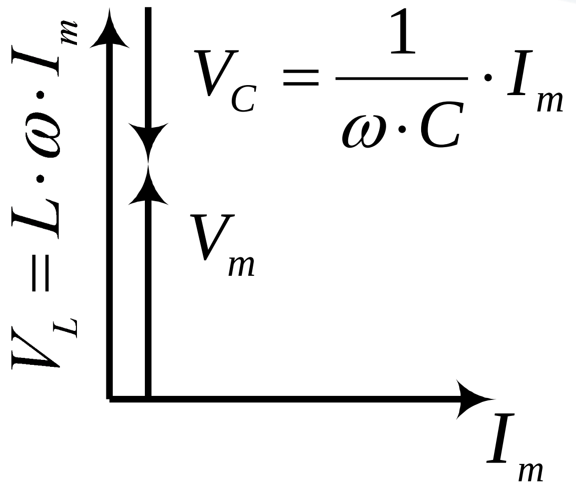
معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$v = A \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi)$$

$$A = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot I_m$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

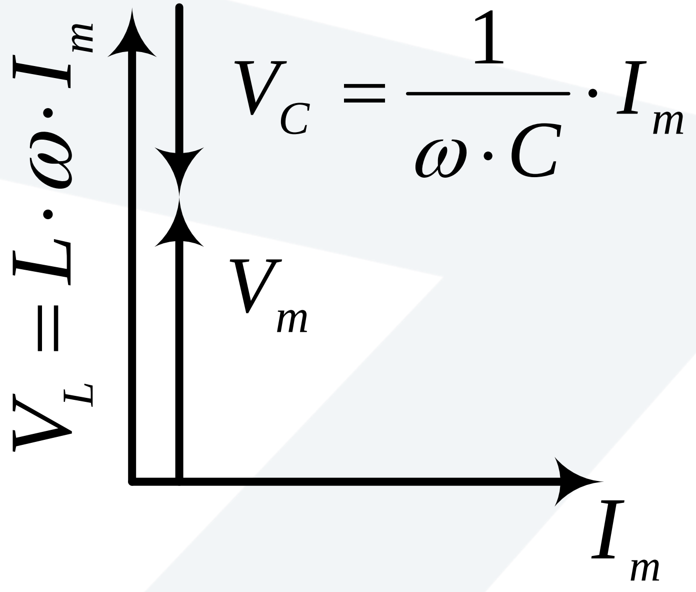
وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة سريان التيار **i** هي:



$$\mathbf{v} = (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}}) \cdot \mathbf{I_m} \cdot \mathbf{Sin}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}})$$

أي أن التيارمتأخرعن الجهد بمقدار: $\frac{\pi}{2}$

إذاً يكون التيارفي الدارات الحاوية على L و C متصلان تسلسلياً متأخراً عن الجهد بزاوية مقدارها 90^o.



$$\left(L\cdot\omega - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)\cdot I_m\cdot \mathrm{Cos}\omega t = V_m\cdot \mathrm{Cos}\omega t$$

$$\Rightarrow Z = \frac{V_m}{I_m} = L\cdot\omega - \frac{1}{\omega\cdot C}$$

مناقشة:

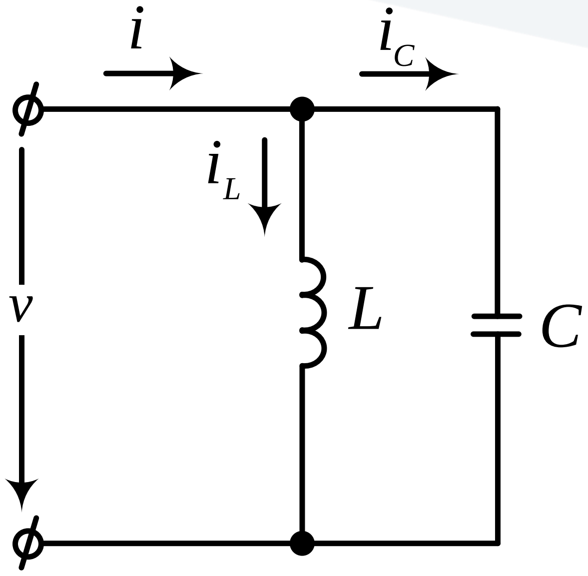
$$Z = \frac{V_m}{I_m} = L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

❖ إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ فإن للدارة صفة تحريضية، وعندها يكون اتجاه شعاع الجهد الكلي هو من اتجاه شعاع الجهد المطبّق على الوشيعة.

❖ إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ فإن للدارة صفة سعوية، وعندها يكون اتجاه شعاع الجهد الكلي هو من اتجاه شعاع الجهد المطبّق على المكثف.

❖ إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون الدارة في حالة طنين **Resonance**.

9. دارة كهربائية تحتوي على ملف ومكثف بوصل تفرعي (دارة LC):



$$v = V_m \cdot \sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$i = i_L + i_C = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt + C \cdot \frac{dv}{dt}$$

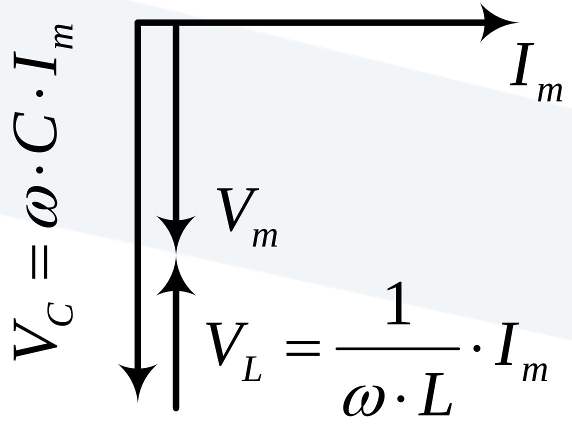
$$i = C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot \sin\omega t) + \frac{1}{L} \cdot \int V_m \cdot \sin\omega t$$

$$i = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \cos\omega t + \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot (-\cos\omega t)$$

$$i = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \cos\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot \cos\omega t$$

$$= \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot V_m \cdot \cos\omega t$$

$$i = \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot V_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة، هو من الشكل:

$$i = A \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi)$$

$$A = (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m = Z \cdot V_m$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

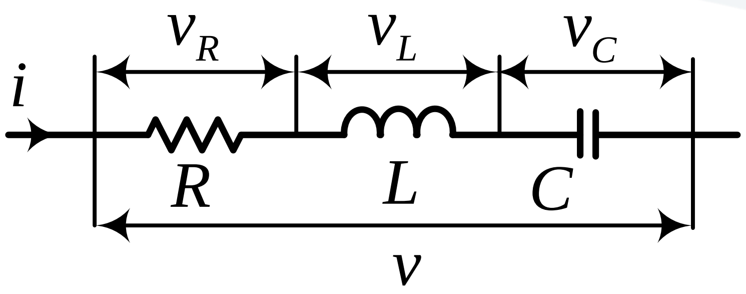
وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد **v** هي:

$$i = (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

أي أن الجهد متأخر عن التيار بمقدار $\frac{\pi}{2}$

إذاً يكون الجهد في الدارات الحاوية على L و C متصلان تفرعياً متأخراً عن التيار بزاوية مقدارها 90°.

10. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف ومكثف بوصل تسلسلي (دارة RLC):



$$i = I_m \cdot Sin\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

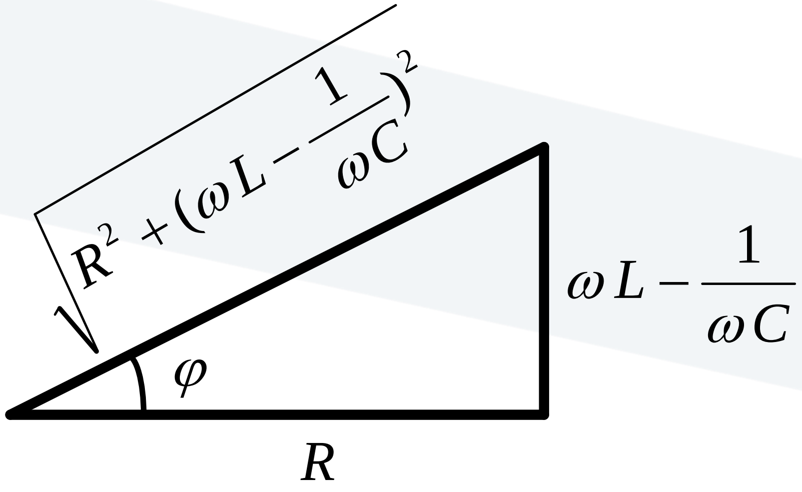
$$v = v_R + v_L + v_C = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t + L \cdot \omega \cdot I_m \cdot Cos\omega t + \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot (-Cos\omega t)$$

$$v = R \cdot I_m \cdot Sin\omega t + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot I_m \cdot Cos\omega t$$

معادلة الجهد هي من الشكل: $v = A \cdot Sin(\omega t + \varphi) = A \cdot Sin\omega t \cdot Cos\varphi + A \cdot Cos\omega t \cdot Sin\varphi$

$$R \cdot I_m = A \cdot Cos\varphi \qquad , \qquad (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot I_m = A \cdot Sin\varphi$$



$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\mathrm{Cos}\varphi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \Rightarrow A = \frac{R \cdot I_m}{\mathrm{Cos}\varphi} = \frac{R \cdot I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}}$$

$$\Rightarrow A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = I_m . Z$$

وفقاً لذلك تكون معادلة الجهد الكلي المطبق على الدارة نتيجة سريان التيار i هي:

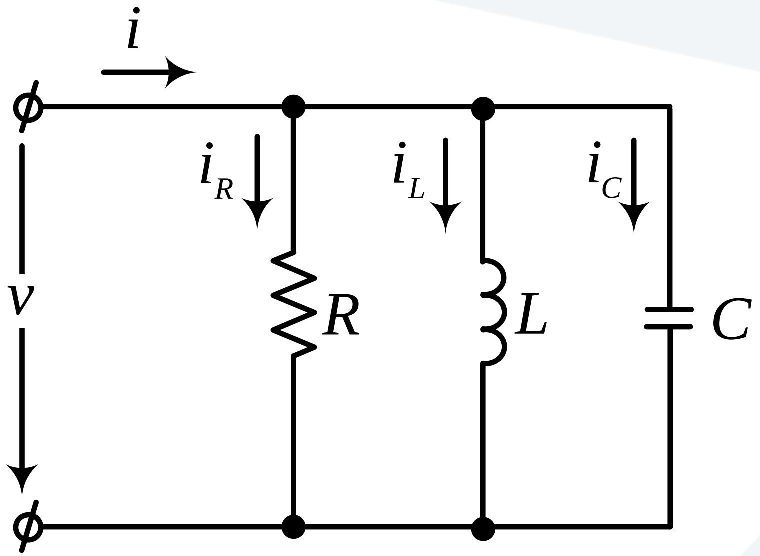
$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \cdot \mathrm{Sin}(\omega t - \mathrm{arctg}(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}))$$

مناقشة:

- إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ موجبة، ويكون التيار متأخراً عن الجهد، والتأثير العام للدارة تحريضي.
- إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ سالبة، ويكون التيار متقدماً على الجهد، والتأثير العام للدارة سعوي.
- إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ مساوية للصفر، ويكون لكل من التيار والجهد الطور نفسه، وعندها تصبح الممانعة مساوية للمقاومة $Z = R$

يسمّى هذا الشرط شرط رنين أو طنين الجهد **Voltage Resonance**.

11. دارة كهربائية تحتوي على مقاومة وملف ومكثف بوصل تفرعي (دارة RLC):



$$v = V_m \cdot \text{Sin}\omega t$$

معادلة تشغيل الدارة:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt + C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{V_m \cdot \text{Sin}\omega t}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int V_m \cdot \text{Sin}\omega t \cdot dt + C \cdot \frac{d}{dt}(V_m \cdot \text{Sin}\omega t)$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \text{Sin}\omega t - \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot \text{Cos}\omega t + C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \text{Cos}\omega t$$

$$i = \frac{V_m}{R} \cdot \text{Sin}\omega t + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m \cdot \text{Cos}\omega t$$

معادلة التيار، المفترض مروره في الدارة نتيجة تطبيق الجهد، هي من الشكل:

$$i = A \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi) = A \cdot \text{Sin}\omega t \cdot \text{Cos}\varphi + A \cdot \text{Cos}\omega t \cdot \text{Sin}\varphi$$

$$\frac{V_m}{R} = A \cdot Cos\varphi \qquad (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}) \cdot V_m = A \cdot Sin\varphi$$

وبالتالي فإن:

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})}{\frac{1}{R}} \Rightarrow \varphi = arctg(\frac{(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})}{\frac{1}{R}})$$

$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2}} \Rightarrow A = \frac{V_m}{\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2}}}$$

$$\Rightarrow A = V_m \cdot \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L})^2} = V_m \cdot Z$$

وفقاً لذلك تكون معادلة التيار الكلي الذي يسري في الدارة نتيجة تطبيق الجهد v هي:

$$i = Z \cdot V_m \cdot Sin(\omega t + arctg(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}})$$

إذاً تعتمد زاوية التيار في الدارات الحاوية على R و C و L بوصل تفرعي على القيم النسبية لكلٍ من $1/\omega \cdot L$ و $\omega \cdot C$

$$i = Z \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \operatorname{arctg}(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}}))$$

مناقشة:

❖ إذا كانت $\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ موجبة، ويكون التيار متقدماً على الجهد، والتأثير العام للدارة سعوي.

❖ إذا كانت $\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ سالبة، ويكون التيار متأخراً عن الجهد، والتأثير العام للدارة تحريضي.

❖ إذا كانت $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ تكون زاوية الطور φ مساوية للصفر، ويكون لكل من التيار والجهد الطور نفسه، وعندها تصبح الممانعة مساوية لمقلوب المقاومة $Z = 1/R$

يسمّى هذا الشرط شرط رنين أو طنين التيار **Current Resonance** .

مسائل

1. دارة مكونة من مقاومة ومكثف RC حيث $R=5\ [\Omega]$ و $C=20[\mu F]$. يمر فيها تيار معادلته الزمنية $i=2.\cos 5000t$. اكتب معادلة الجهد الكلي المطبق عليها.

2. يمر في دارة RL تسلسلية التيار $i=2.\sin 500t$

حيث $R=10\ [\Omega]$ و $L=20\ [mH]$.

احسب الجهد الكلي المطبق عليها.

3. إذا كانت المعادلة الزمنية للجهد المطبق على الدارة التفرعية الموضحة بالشكل هي: $v = 100.\sin(100t + 50^\circ)$ [V]

فما هي المعادلة الزمنية للتيار الكلي المار في الدارة؟