Numerical analysis

Dr. Yamar Hamwi

Al-Manara University

2022-2023

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Numerical analysis

Lecture 3

حل المعادلات غير الخطية
(Solution of non linear equations)

مقدمة

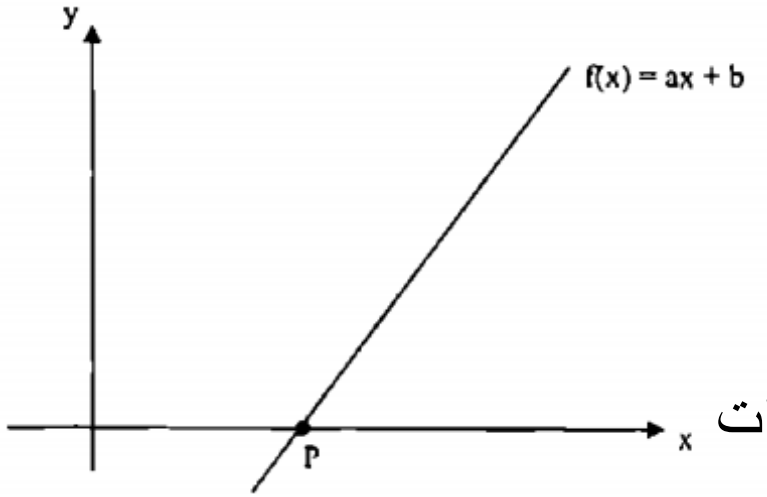
في بعض المسائل التي تواجهنا في العالم الحقيقي نقف حائرين أمام معادلة جبرية لا نعرف كيف نبدأ في إيجاد حلها (ايجاد أصفار التوابع)، على سبيل المثال:

$$f(x) = 3.24x^8 - 2.42x^7 + 10.34x^6 + 11.01x^2 + 47.98$$
$$g(x) = 2^{x^2} - 10x + 1$$
$$h(x) = \cosh\left(\sqrt{x^2+1} - e^x\right) + \log|\sin x|$$

لذلك نلجأ لإيجاد حلول تقريبية لها

x x

مقدمة



معادلة خطية بمتحول واحد: نعلم أنها كثير حدود من من الشكل $ax + b = 0$
وهندسياً تمثل مستقيم وعندما نبحث عن حل أي نجد قيمة x وتسمى x جذراً (root) للمعادلة

معادلة غير خطية بمتحول واحد: فهي أي معادلة غير خطية فهي قد تحتوي على كثيرات الحدود أو أي توابع.

حل المعادلة غير الخطية : بفرض لدينا المعادلة $f(x) = 0$
إن قيمة x التي تجعل المعادلة محققة هو جذر المعادلة (صفر المعادلة) أو فاصلة نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل. إن مسألة ايجاد الجذور الحقيقية للمعادلة تعدُ من المسائل الهامة ولها تطبيقات عديدة في شتى النواحي .

الطريقة البيانية (Graphical Method)

على الرغم من وجود معادلات غير خطية يمكن حلها مباشرة إلا أن هناك العديد من المعادلات التي لا يمكن حلها. في مثل هذه الحالات ، يكون البديل الوحيد هو تقنية الحل التقريبي.

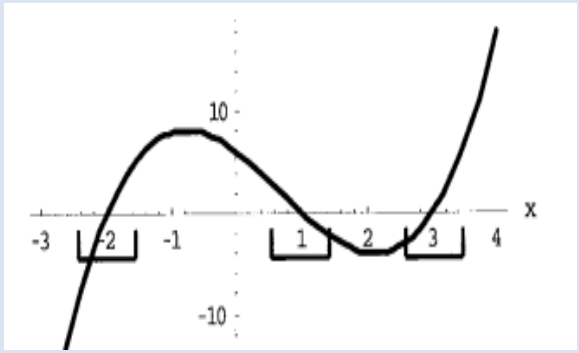
تتمثل إحدى طرق الحصول على حل تقريبي في **رسم الدالة** وتحديد مكان تقاطعها مع المحور الفواصل.

تتمثل **الطريقة البيانية** لإيجاد الجذور لمعادلة **f(x)=0** في مجال ما، على مايلي:

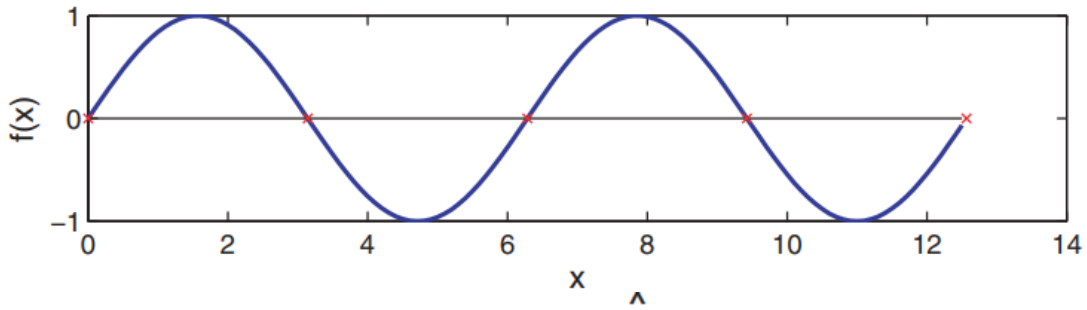
١- رسم منحني للتابع $y = f(x)$ في ذلك المجال.

٢- نجد نقاط تقاطع المنحني مع محور الفواصل ، فواصل تلك النقاط هي جذور المعادلة.

٣- نعيين المجالات التي تقع فيها تلك الجذور.

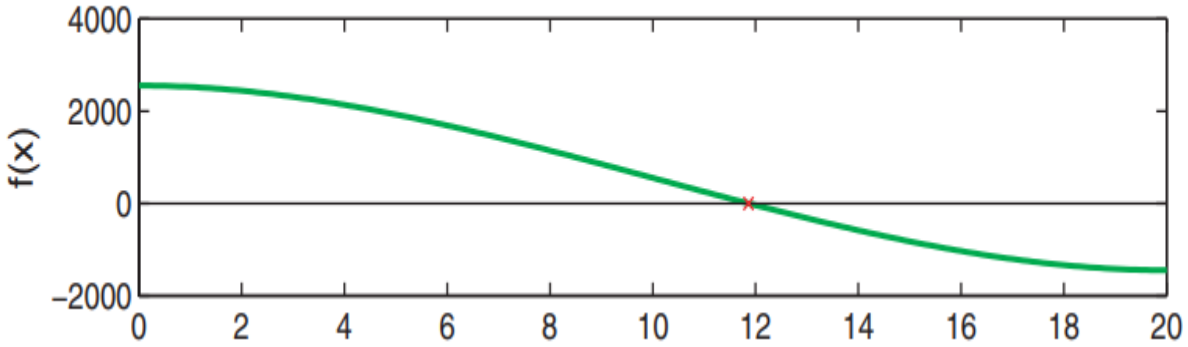


الطريقة البيانية (Graphical Method)



$$f(x) = \sin(x).$$

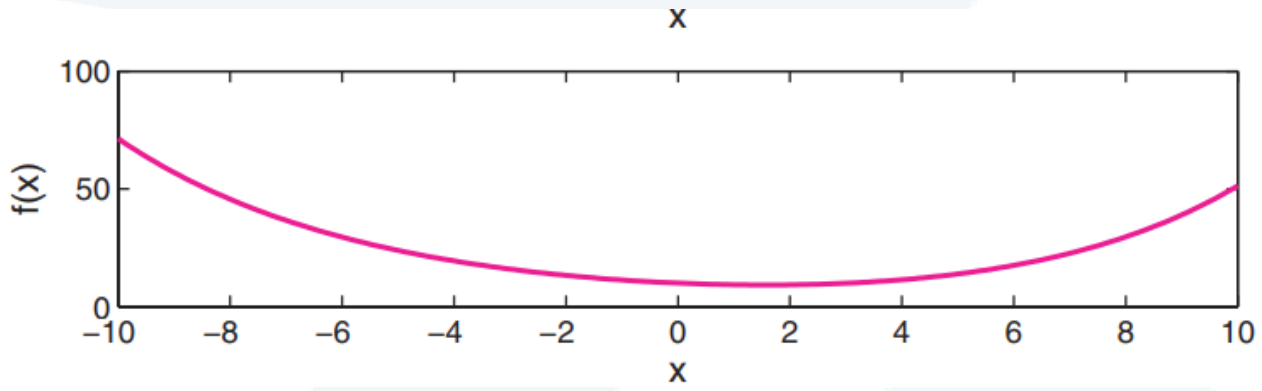
On the interval $[a,b] = [0,4\pi]$ there are five roots;



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552, \quad 0 \le x \le 20.$$

one root x^* in this interval.

الطريقة البيانية (Graphical Method)



$$f(x) = 10\cosh(x/4) - x, \quad -\infty < x < \infty,$$

where the function cosh is defined by $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Not every equation has a solution. This one has no real roots.

الطريقة البيانية (Graphical Method)

تعريف : نتأمل المعادلة f(x)=g(x) نقول إنّ x هو جذر المعادلة إذا كان فاصلة نقطة تقاطع الخطيين البيانيين للتابعين f, g

تتمثل **الطريقة البيانية** لإيجاد الجذور للمعادلة **f(x)=g(x)** في مجال ما، على مايلي:

١- رسم منحني كل من التابعين f, g في ذلك المجال.

٢- نجد نقاط تقاطع المنحنيين ، فواصل تلك النقاط هي جذور المعادلة.

٣- نعيين المجالات التي تقع فيها تلك الجذور.

الطريقة البيانية (Graphical Method)

مثال

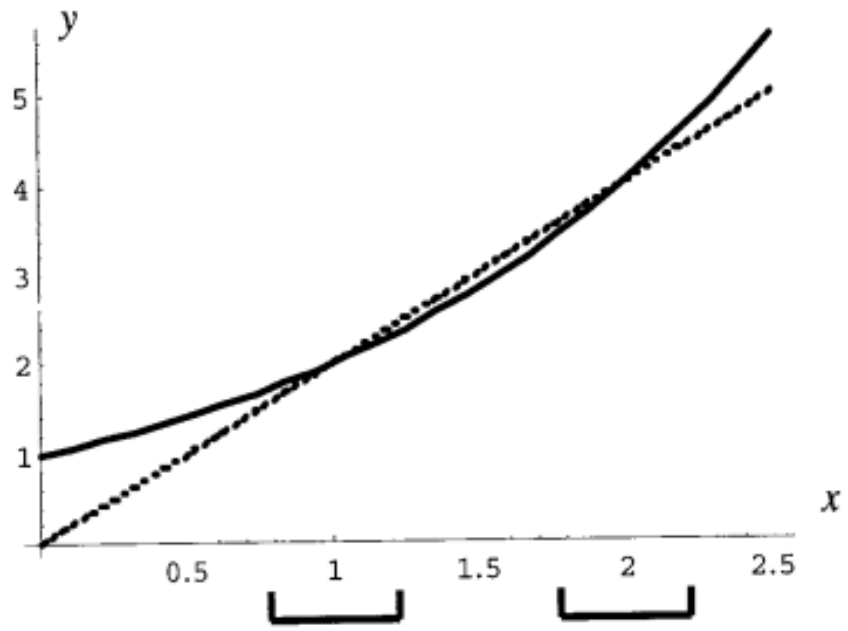
لتكن لدينا المعادلة:

$$f(x)=2^x-2x=0$$

نجزئ الدالة الأساسية إلى الدالتين:

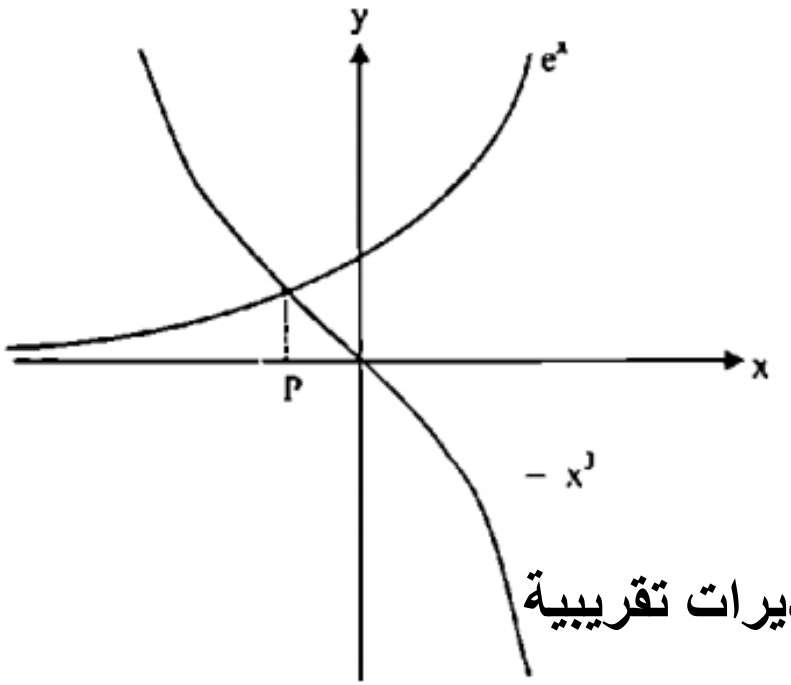
$$\varphi(x)=2^x\ ,\ g(x)=2x$$

يبين الشكل(3.2) فاصلتي نقطتي تقاطع الدالتين وهما $x_1=2$, $x_2=1$، وبالطبع فهما جذران للمعادلة المطلوبة، ويمكن عزل الجذر الأول مثلا في المجال $x_1\in[1.8,2.2]$، والجذر الثاني في المجال $x_2\in[0.8,1.2]$.



الطريقة البيانية (Graphical Method)

مثال: أوجد جذور المعادلة بالطريقة البيانية: $e^x + x^3 = 0$



الحل: ليس من السهل تخمين لذلك لنجزئها إلى تابعين وتصبح المعادلة بالشكل

$$e^x = -x^3$$

نرسم الدالتين $f(x) = e^x$ و $g(x) = -x^3$ فيكون

عيوب هذه الطريقة :على الرغم من أن الطرق البيانية مفيدة في الحصول على تقديرات تقريبية للجذور ، إلا أنها محدودة بسبب افتقارها إلى الدقة.

الطرق المجالية - طريقة التنصيف (Bracketing Method -Bisection Method)

سنتناول في هذه الفقرة بعض الطرق المجالية لإيجاد **جذر لمعادلة غير خطية بمتحول واحد** علما أن هذه الطرق تعتمد على إيجاد جذر انطلاقا من مجال أي تشترط هذه الطرق **وجود الحل قبل بدء (الحل مضمون)** لذلك فهي تعتمد على **مبرهنة القيمة الصغرى**

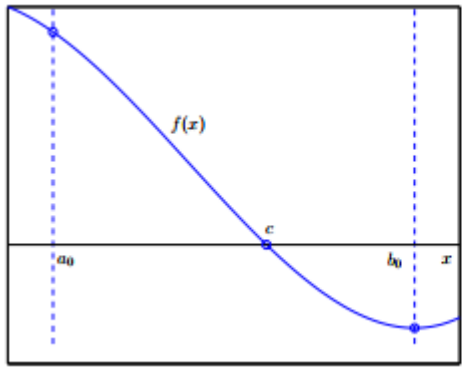
جميع الطرائق العددية يمكنها الاقتراب من الجذر الدقيق بمقدار تفاوت (خطأ) ويدعى Tolerance
ونقول عن $\tilde{x}$ إنه جذر تقريبي للمعادلة إذا تحقق:

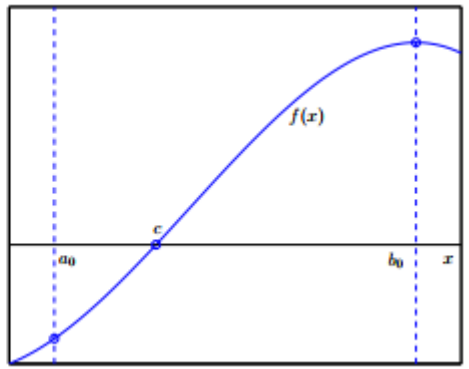
$$1) \quad |x - \tilde{x}| < \varepsilon$$

$$2) \quad f(\tilde{x}) < \varepsilon$$

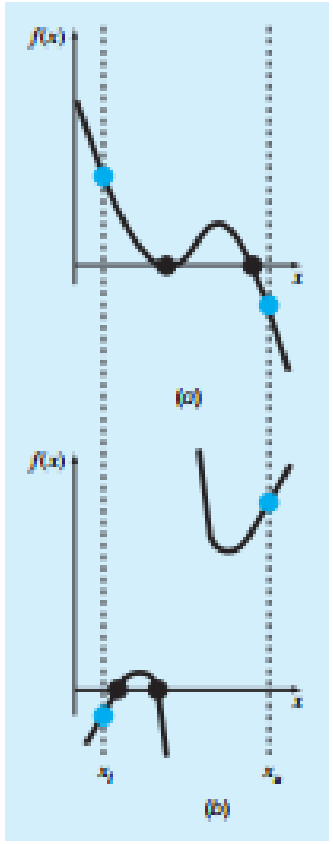
Bolzano's Theorem

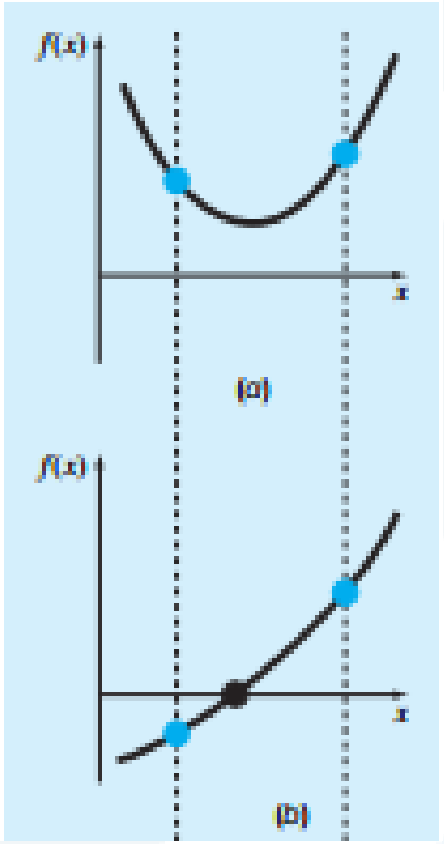
لـتكن الدالـة $y=f(x)$ معرفـة ومسـتمرة علـى المجـال $[a,b]$ فـإذا كـان $f(a).f(b)<0$ نقول إنه يوجد عدد $a<x_0<b$ بحيث يكون $f(x_0)=0$، نسمي x_0 جذر دقيق للمعادلة $f(x)=0$

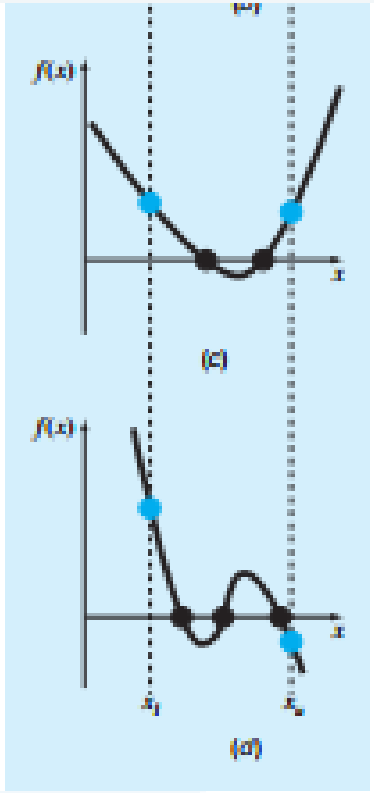


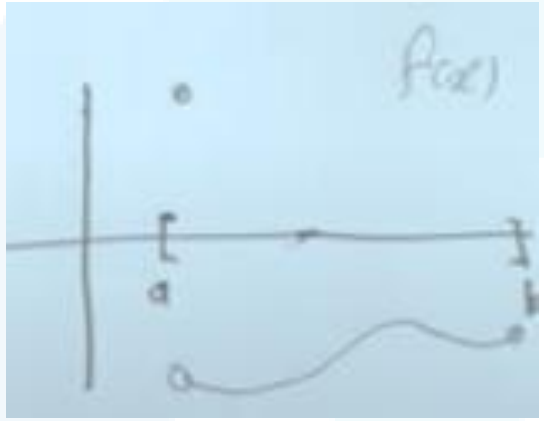


Bolzano's Theorem



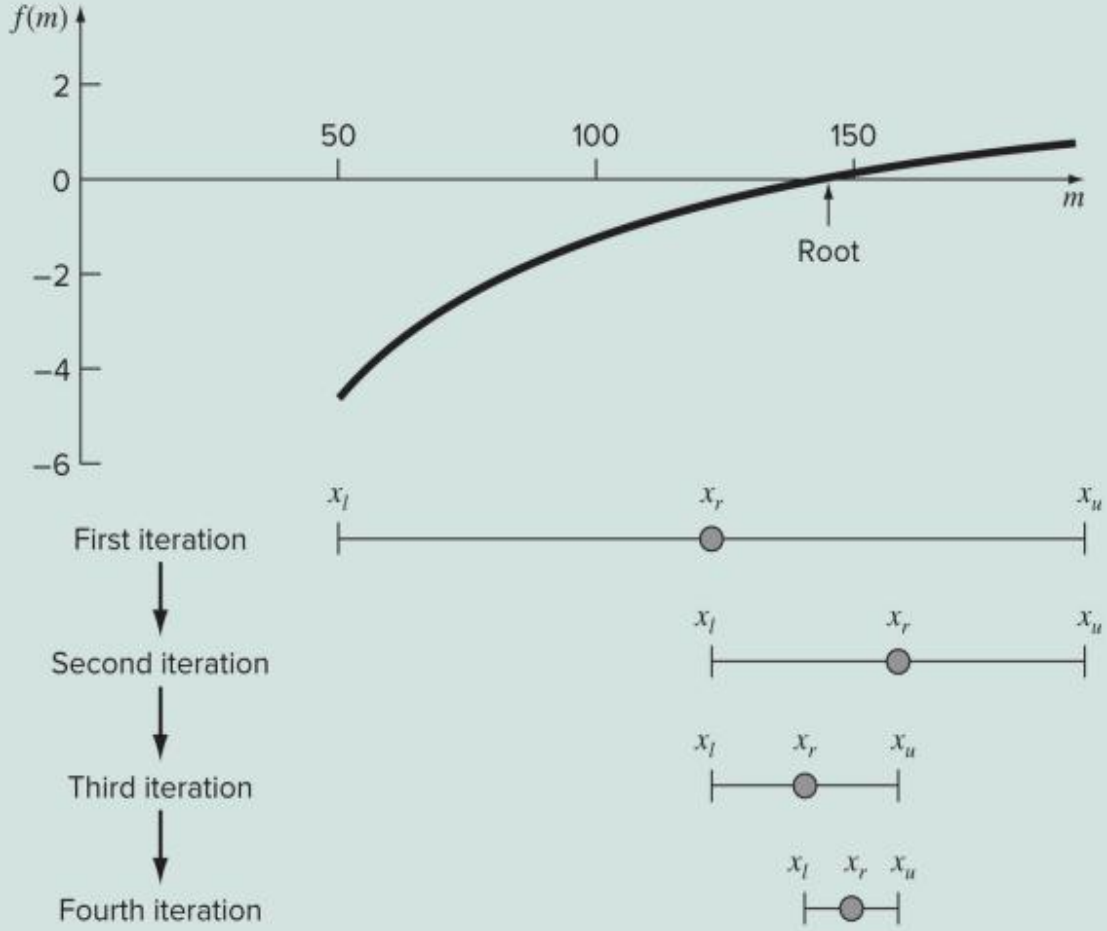






المجال مفتوح ويحقق
شرط ثاني لكن لايوجد
حل

طريقة التنصيف (Bisection Method)



في هذه الطريقة :

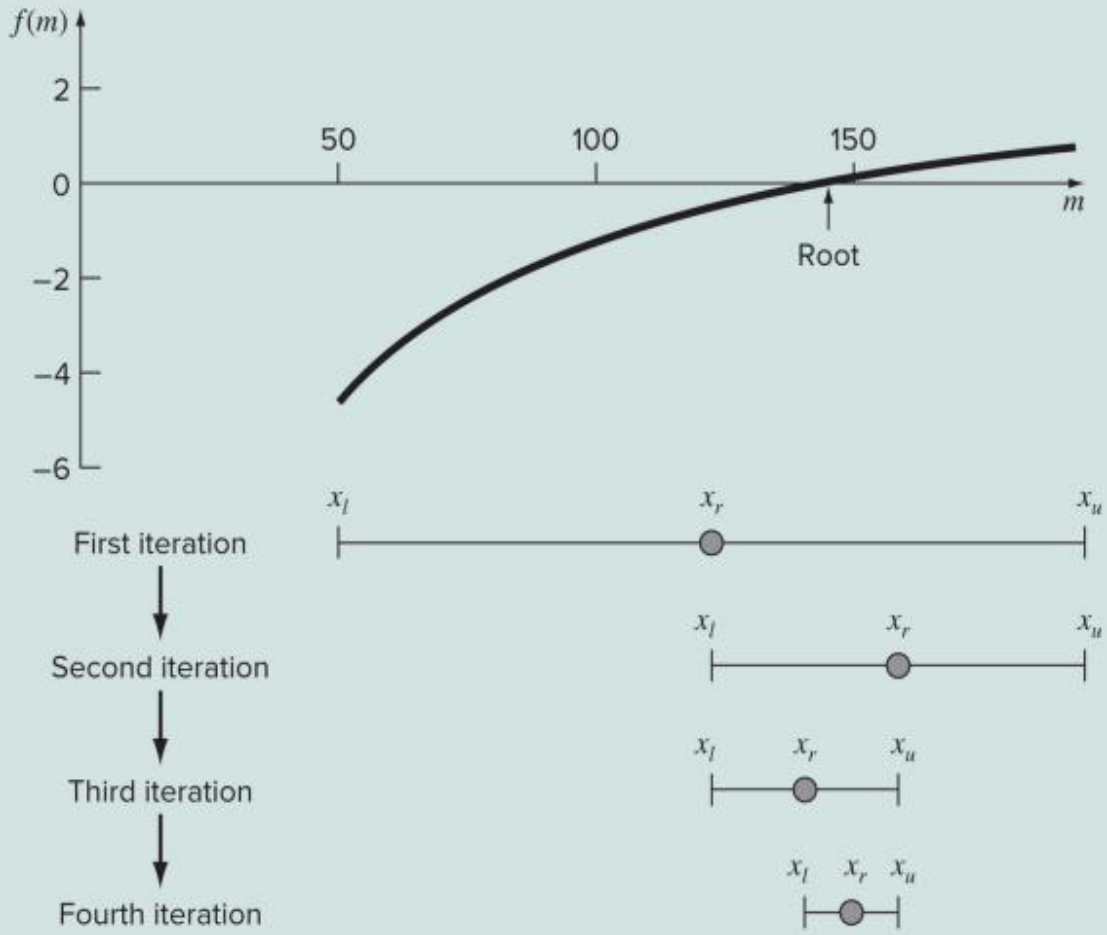
نحسب قيمة التابع عند نقطة x_r تقع في منتصف المسافة بين x_L و x_U فإذا كانت إشارة $f(x_r)$ **تختلف** عن إشارة $f(x_U)$ ، فإن الجذر يقع بين x_U والمنتصف

أما إذا **تشابهت** الإشارتان فإنها ستختلف بالتأكيد عن إشارة $f(x_L)$ وبالتالي يقع الجذر بين المنتصف و x_L

ويمكن تكرار هذه العملية عدة مرات للحصول على مجال صغير يحوي الجذر المطلوب.

طريقة التنصيف (Bisection Method)

طريقة التنصيف هي إحدى طرق إيجاد الجذر والتي بها يتم تنصيف مجال ما بصورة تكرارية واختيار مجال فرعي يقع عليه الجذر من أجل تحسين المعالجة. مع أنها بسيطة جدا ومرنة إلا أن طريقة التنصيف بطيئة نسبيا



طريقة التنصيف (Bisection Method)

Step 1: Choose lower x_l and upper x_u guesses for the root such that the function changes sign over the interval. This can be checked by ensuring that $f(x_l)f(x_u) < 0$.

Step 2: An estimate of the root x_r is determined by

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Step 3: Make the following evaluations to determine in which subinterval the root lies:

(a) If $f(x_l)f(x_r) < 0$, the root lies in the lower subinterval. Therefore, set $x_u = x_r$ and return to step 2.

(b) If $f(x_l)f(x_r) > 0$, the root lies in the upper subinterval. Therefore, set $x_l = x_r$ and return to step 2.

(c) If $f(x_l)f(x_r) = 0$, the root equals x_r; terminate the computation.

طريقة التنصيف (Bisection Method)

مثـــال : لـتكن لـدينا المعادلـة $f(x)=x^3+4x^2-10=0$، والمطلـوب إيجـاد الجـذر التقريبي لهذه المعادلة، والذي يقع في المجال $[1,2]$ متخذا $\varepsilon = 0.05$.

خطوة (1): نوجد $x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.

خطوة (2): نوجد $f(x_0) = f(\frac{3}{2}) = 2.33$.

خطـــوة (3): نوجـــد $f(a) = f(1) = -5$ ، ثـــم نتحقـــق مـــن العلاقـــة $f(a).f(x_0)<0$ ، فنجدها محققة، لذلك نأخذ $b = x_0 = \frac{3}{2}$ ويصبح المجال الجديد $[a,b] = [1, \frac{3}{2}]$.

طريقة التنصيف (Bisection Method)

خطوة (4):نوجد $|a-b|=|1-\frac{3}{2}|=0.5>\varepsilon$ ، لذلك نعود إلى الخطوة الأولى

ونعين من جديد x_0 جديدة، فتكون $x_0=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4}=1.25$ ، ويكون

$f(1.25)=-1.80$ نلاحظ أن $f(a).f(x_0)>0$، لذلك يصبح المجال الجديد

$[a,b]=[1.25,1.5]$. نوجد $|a-b|=|1.5-1.25|=0.25>\varepsilon$، لذلك نوجد x_0 جديدة

$x_0=\frac{1.25+1.5}{2}=1.38$ ، ويكون $f(x_0)=0.16$. نلاحظ أن $f(a).f(x_0)<0$ لذلك

يصبح المجال الجديد

$[a,b]=[1.25,1.38]$ ويكون $|a-b|=0.13>\varepsilon$ ، لذلك نوجد:

$x_0=\frac{1.25+1.375}{2}=1.31$ ويكون:

$f(x_0)=-0.85$ نلاحظ أن $f(a).f(x_0)>0$، لذلك يصبح المجال الجديد

$[a,b]=[1.31,1.38]$ ويكون:

طريقة التنصيف (Bisection Method)

$|a-b|=0.06>\varepsilon$ ، لـذلك نوجـد $x_0=1.34$ ، ويكـون $f(x_0)==0.35$. نلاحـظ أن:

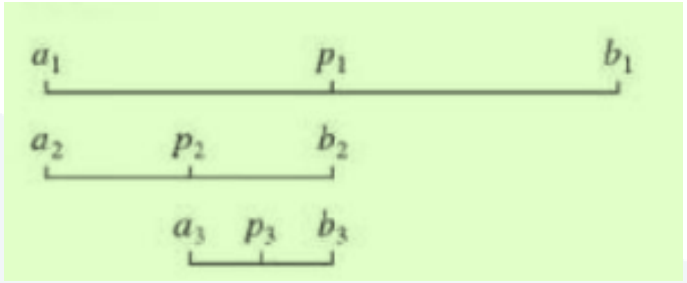
$f(a).f(x_0)<0$، لذلك يصبح المجال الجديد $[a,b]=[1.31,1.34]$

ويكون $|a-b|=0.02<\varepsilon$ أي أن الجذر التقريبي هو $x_0=1.34$.

طريقة التنصيف (Bisection Method)

n	xL	XU	XR	F(xL)	F(xU)	F(xr)	E
1	1	2	1.5	-5	14	2.375	
2	1	1.5	1.25	-5	2.375	-1.80	0.5
3	1.25	1.5	1.38	-1.80	2.375	0.245672	0.25
4	1.25	1.38	1.31	-1.80	0.245672	-0.887509	0.13
5	1.31	1.38	1.34	-0.887509	0.245672	-0.411496	0.07
6	1.31	1.34					0.03

الحل التقريبي هو $\tilde{x} = 1.34$



طريقة التنصيف (Bisection Method)

مبرهنة : ليكن $f \in C[a,b]$ و $f(a).f(b) < 0$، عندئذ تولد طريقة التنصيف المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي تقترب من الجذر p للدّالة f حيث

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} \quad \text{عندما} \quad n \ge 1$$

■

أي **الخطأ الأعظمي** المرتكب بطريقة التنصيف هو $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$

بما أنَّ $|p_n - p| < \varepsilon$ يكون حسب المبرهنة $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ بأخذ لوغاريتم الطرفين وإعادة الصياغة نحصل على

$$n \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

وهو عدد أقل تكرارات اللازمة للحصول على جذر لا يتجاوز خطأ معين

طريقة التنصيف (Bisection Method)

مثال:

أوجد أقل عدد تكرارات لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة التالية

$$x^2 - 2 = 0 \quad : x \in [1,2]$$

بطريقة التنصيف وبدقة $\varepsilon = 0.001$ ؟

الحل :

$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

$$n \geq \frac{\ln(2-1) - \ln 0.001}{\ln 2}$$

$$n \geq 9.9657$$

$$n = 10$$

طريقة التنصيف (Bisection Method)

ميزات الطريقة التنصيف:

التقارب مضمون

حد الخطأ المعطى (الخطأ الأعظمي) يتناقص بمقدار النصف في كل تكرار

التقارب بطيء بسبب الاعتماد على طرفي المجال فقط

تمارين

أولاً: أوجد جذر التقريبي للمعادلة

$$x = e^{-x}$$

١- بطريقة البيانية

٢- بطريقة التنصيف بحيث لا يتجاوز الخطأ $\varepsilon = 0$

ثانياً: أوجد أقل عدد التكرارات اللازمة لإيجاد الجذر التقريبي للمعادلة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بدقة 0.001

تمارين

. لدينا الدالة $f(x) = x^3 - 2x + 2$ والمطلوب

أوجد تكرارين للجذر التقريبي للدالة السابقة الموجودة ضمن المجال $[-2, -1]$ باستخدام طريقة تنصيف المجال واحسب الخطأ الأعظمي المرتكب في كل مرة

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Thank you for your attention