# نظم التحكم

المحاضرة الأولى (عملي)

تحويلات لابلاس

م. زينة أديب علي

قسم الروبوت سنة رابعة-فصل أول

مقدمة:

- يحتوي أي نظام على عناصر توليد للطاقة (منابع) وعلى عناصر تخزين للطاقة (قصور ذاتي أو تحريضية أو مكثفات) وعناصر تبديد للطاقة (مقاومات)
- يتم تمثيل النظام الديناميكي بمجموعة معادلات تفاضلية (قد تحتوي على تكاملات وتفاضلات في وقت واحد) مما يزيد من تعقيدها وبالتالي فإن الحاجة لتبسيط هذه المعادلات عبر تحويلها إلى معادلات جبرية يسهل التعامل معها.

تحويل لابلاس:

- تحويل خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة تابعة لمتغير مركب (يدعى متغير لابلاس S).
- يمكننا تحويل لابلاس من تحويل المعادلات التفاضلية (التفاضلية التكاملية) إلى معادلات جبرية يمكن تبسيطها واختصارها والتعامل معها بسهولة ويسر.
- يعطى تحويل لابلاس بالعلاقة:

$$F(s) = L|f(t)| = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

| اسم الدالة | الإشارات | تحويلات لابلاس |
|---|---|---|
| دالة النبضة | $r(t) = \delta(t)$ | $1$ |
| دالة الخطوة | $u(t) = \begin{cases} A; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$ | $\frac{A}{s}$ |
| دالة الانحدار | $r(t) = \begin{cases} At; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$ | $\frac{A}{s^2}$ |
| دالة التسارع | $r(t) = At^2$ | $\frac{A}{s^3}$ |
| الدالة الأسية | $Ae^{-at}$ | $\frac{A}{s+a}$ |
| الدالة الجيبية | $A\sin \omega t$ | $\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| دالة جيب التمام | $A\cos \omega t$ | $\frac{As}{s^2+\omega^2}$ |

تحويلات لابلاس لبعض التوابع الشهرية

**مثال:**

أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

الحل:

$$F(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$a = \lim_{s \to -1} (s+1)\, F(s) = 2$$

$$b = \lim_{s \to -2} (s+2) F(s) = -1$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

ومنه يكون لدينا:

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

**مثال:**

أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

الحل:

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+s+1}$$

$$a = \lim_{s \to 0} s * F(s) = 1$$

لحساب قيمة b,c نوحد المقامات ثم نقارن:

$$F(s) = \frac{(a+b)s^2+(a+c)s+a}{s(s^2+s+1)}$$

وبالمقارنة مع التابع الأساسي المعطى $F(s)$ ينتج لدينا:

$$a + b = 0 \quad a + c = 1$$

ومنه ينتج لدينا:

$$a = -1 \quad c = 0$$

ومنه:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+s+1}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.866^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2+(0.866)^2}$$

ومنه يكون تحويل لابلاس العكسي:

$$f(t) = 1 + e^{-0.5t}\sin 0.866t + 0.57e^{-0.5t}\cos 0.866t$$

**مثال:**

أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

**الحل:**

$$F(s) = \frac{a}{(s+1)^3} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{s+1}$$

$$a = \lim_{s\to -1}(s+1)^3 F(s) = 2$$

$$b = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}(s+1)^3 F(s) = 0$$

$$c = \lim_{s\to -1}\frac{1}{2!} * \frac{d}{ds^2}(s+1)^3\, F(s) = 1$$

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}$$

$$f(t) = e^{-t} + t^2 e^{-1}$$

**مثال:**

أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$$

درجة البسط أعلى من درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام:

$$F(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

بحساب قيم الثوابت:

$$a = \lim_{s\to -1} (s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = 2$$

$$b = \lim_{s\to -2} (s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = -1$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}$$

**مثال:**

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$2x'' + 7x' + 3x = 0$$

من أجل شروط ابتدائية:

$$x(0) = 3 \quad x'(0) = 0$$

بإجراء تحويل لابلاس:

$$2[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 7[sX(s) - x(0)] + 3X(s) = 0$$

$$2s^2x(s) - 6s + 7sX(s) - 21 + 3X(s) = 0$$

$$(2s^2 + 7s + 3)X(s) = 6s + 21$$

$$X(s) = \frac{6s+21}{2s^2+7s+3} = \frac{3s+10.5}{(s+0.5)(s+3)}$$

$$X(s) = \frac{a}{s+0.5} + \frac{b}{s+3}$$

$$a = \lim_{s\to -0.5} (s+0.5)X(s) = 3.6$$

$$b = \lim_{s\to -3} (s+3)\,X(s) = -0.6$$

$$X(s) = \frac{3.6}{s+0.5} - \frac{0.6}{s+3}$$

$$x(t) = 3.6e^{-0.5t} - 0.6e^{-3t}$$

**أمثلة غير محلولة:**

1. أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$ باعتبار الشروط الابتدائية:

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$$

2. أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5$ باعتبار الشروط الابتدائية صفرية.