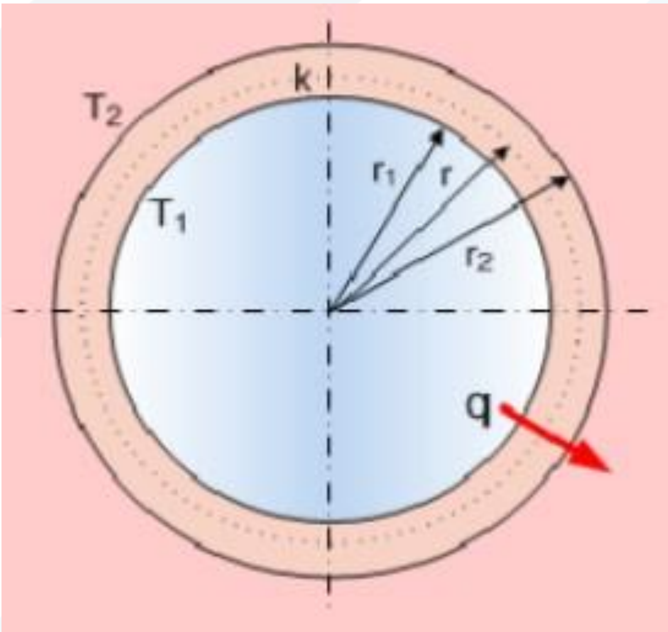
انتقال الحرارة بالتوصيل خلال الاسطوانات المجوفة Heat conduction through hollow cylinders

إذا تصورنا ماسورة تحمل ماء ساخناً فإن هذا الماسورة سوف تفقد وبصورة مستمرة حرارة الوسط المحيط عن طريق جدار الماسورة. ويتم انتقال الحرارة في هذه الماسورة في الاتجاه المعامد لسطح الماسورة. ولو فرضنا أن درجات الحرارة للسطح الداخلي للماسورة ولسطحها الخارجي ثابتة ولا تتغير مع الزمن فإن انتقال الحرارة في هذه الحالة يصبح مستقراً.



الشكل (9): التوصيل الحراري خلال اسطوانة مجوفة.

يوضح الشكل رقم 9 حالة اسطوانة مجوفة نصف قطرها الداخلي r_1 والخارجي r_2 وطولها/ ومعامل انتقال الحرارة لمادة الاسطوانة k. درجات الحرارة لسطحي الماسورة الداخلي والخارجي هي T_1 و T_2 ولا يوجد توليد حراري في جسم الماسورة.

يمكن أن يكتب قانون فورير للتوصيل الحراري كالتالي:

$$q = -kA_r \frac{dT}{dr}$$

حيث أن A_r هي مساحة سطح الأسطوانة عند أي نصف قطر و $\frac{dT}{dr}$ هي التغير في درجة الحرارة بالنسبة لنصف القطر وهي ما يعرف ب *temperature gradient*.

مساحة سطح الأسطوانة: $A_r = 2\pi r l$ ، بالتعويض في قانون فوريير وفصل المتغيرات dT و dr وإجراء التكامل المحدود يمكن استنتاج القانون التالي لحساب معدل انتقال الحرارة بالتوصيل بين سطحي الماسورة:

$$q = \frac{2\pi k l \Delta T}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (7)$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة بصورة أخرى:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi k l}} \qquad (8)$$

حيث $\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi k l}$ هي المقاومة الحرارية R لمادة الأسطوانة و ΔT هي القوة الدافعة الحرارية.

مثال (4):

ماسورة اسطوانية مصنوعة من الفولاذ $k = 43\ W/m°C$ سمكها $2\ cm$ وقطرها الداخلي $6\ cm$ تستخدم في مجال التكييف المركزي لنقل الماء الساخن من السخان إلى المبنى المراد تكييفه والذي يبعد $40\ m$ عن السخان. إذا علمت أن درجة حرارة السطح الداخلي للماسورة $60°C$ ودرجة حرارة السطح الخارجي لها $35°C$ احسب معدل الحرارة المفقودة من داخل الماسورة إلى البيئة المحيطة بها.

الحل:

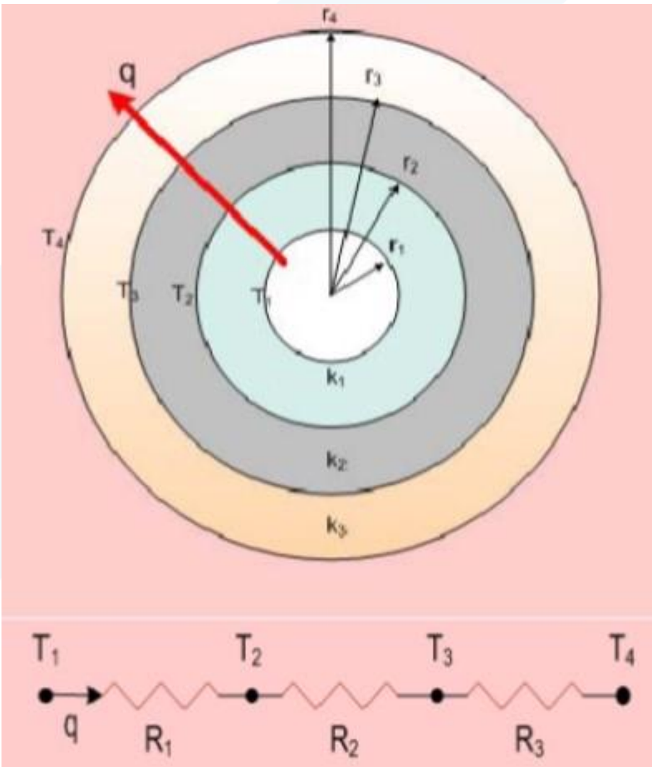
بالإستعانه بالشكل رقم 9 حيث ان نصف قطر الماسورة الداخلي r_1 يساوي $3\ cm$ ونصف قطر الماسورة الخارجي r_2 يساوي نصف القطر الداخلي مضافاً له سمك الأسطوانة ويساوي $5\ cm$.

$$q=\frac{\Delta T}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kl}}$$

$$q=\frac{60-35}{\frac{\ln\frac{5}{3}}{2\pi\times 43\times 40}}=528903\ W$$

انتقال الحرارة بالتوصيل خلال الأسطوانات المزدوجة أو المركبة Composite Cylinders

إذا أخذنا في الإعتبار أسطوانة طويلة مجوفة لها نصف قطر داخلي r_1 ونصف قطر خارجي r_2 ومعزولة بطبقتين من مادتين مختلفتين لكل عازل سمك محدد وطولها/ كما هو موضح بالشكل 10:



الشكل (10): التوصيل الحراري خلال اسطوانة مركبة

إن فكرة المقاومة الحرارية يمكن استخدامها هنا في الاسطوانة المركبة وبكل سهولة كما استخدمت في الحوائط المركبة.

وبالتالي يمكن استنتاج أنه لأسطوانة مركبة مكونة من ثلاث طبقات فإن معدل انتقال الحرارة خلال الأسطوانة يعطى بالمعادلة التالية:

$$q = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_3}$$

حيث ΔT هي الفرق في درجات الحرارة بين السطح الداخلي للأسطوانة والسطح الخارجي للعازل الثاني وتساوي $T_1 - T_4$. هنا لابد من التذكير بأن المقام في المعادلة السابقة يتكون من المقاومات الحرارية لكل من مادة الاسطوانة ومادة العازل الأول ومادة العازل الثاني.

المقاومة الحرارية لمادة الأسطوانة A تساوي $R_1 = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_1 l}$

والمقاومة الحرارية لمادة العازل الأول B تساوي $R_2 = \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_2 l}$

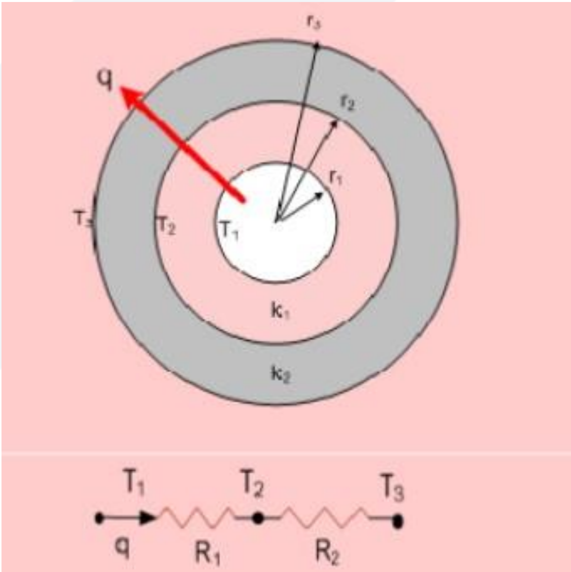
والمقاومة الحرارية لمادة العازل الثاني C تساوي $R_1 = \frac{\ln\frac{r_4}{r_3}}{2\pi k_3 l}$

يمكن كتابة القانون العام لمثل هذه الحالة كالتالي:

$$q = \frac{\Delta T_{tot}}{\sum R} \qquad (9)$$

مثال (5):

ماسورة سميكة مصنوعة من سبيكة نحاس $k = 85\ W/m°C$ قطرها الداخلي $2\ cm$ وقطرها الخارجي $4\ cm$ مغطاة ب $3\ cm$ اسبستس كعازل $k = 0.2\ W/m°C$. إذا كانت درجة حرارة سطح الجدار الداخلي للماسورة $600°C$ ودرجة حرارة سطح العازل من الخارج $100°C$ احسب فقدان الحرارة لكل متر طولي من الماسورة.



الشكل (11): رسم توضيحي للمثال رقم 5.

الحل:

من المعطيات يمكن بسهولة حساب أنصاف الأقطار r_1, r_2, r_3.

$$r_1 = 1\ cm$$

$$r_2 = 2\ cm$$

$$r_3 = 5\ cm$$

مقاومة مادة الأسطوانة:

$$R_1 = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_1 l} = \frac{\ln\frac{2}{1}}{2\pi \times 85 \times 1} = 0.0013\ \frac{℃}{W}$$

مقاومة مادة العازل:

$$R_2 = \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_2 l} = \frac{\ln\frac{5}{2}}{2\pi \times 0.2 \times 1} = 0.7292\ \frac{℃}{W}$$

عليه يمكن حساب فقدان الحرارة من الماسورة كالتالي:

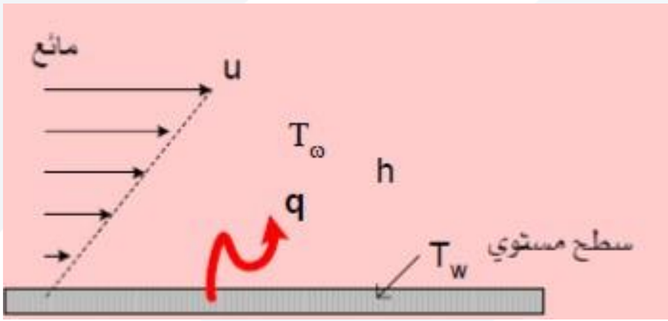
$$q = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2} = \frac{600 - 100}{0.0013 + 0.7292} = 684.5\ \frac{W}{m}$$

انتقال الحرارة بالحمل Convection Heat Transfer

كثيراً ما نستخدم المراوح في حياتنا العملية في التبريد فمثلاً لو وضعنا لوحاً ساخناً أمام مروحة فإن هذا اللوح سوف يبرد. وعندها نقول أن الهواء حمل الحرارة من على سطح اللوح إليه. ولكننا سوف نتساءل ما هي تأثير سرعة الهواء على معدل انتقال الحرارة؟ وهل إذا ضوعفت السرعة سوف يتضاعف معدل انتقال الحرارة؟ وهل معدل انتقال الحرارة سوف يتغير إذا استبدلنا الهواء بالماء؟

انتقال الحرارة بالحمل هو انتقال الحرارة بين سطح صلب والمائع الذي يسري فوق ذلك السطح. وانتقال الحرارة بالحمل يحمل التأثيرين الحمل والتوصيل معاً. وكلما كانت حركة المائع سريعة كلما كان معدل انتقال الحرارة أكبر. ولتفسير طريقة انتقال الحرارة بالحمل نأخذ حالة مائع درجة حرارته T_∞ ينساب على سطح شريحة ساخنة درجة حرارتها T_W. ومن اليسير ملاحظة أن طبقة المائع الملامسة للشريحة تكون ساكنة بينما طبقة المائع البعيدة عن الشريحة تمشي بسرعة المائع، اي أن طبقات المائع في الاتجاه العمودي على الشريحة تأخذ شكلاً مشابهاً لتوزيع السرعة كما في الشكل 12

حيث تساوي سرعة المائع عند السطح صفراً وعليه فإن عملية انتقال الحرارة عند تلك النقطة تكون بالتوصيل. وبمعرفة معامل انتقال الحرارة بالتوصيل للمائع والتدرج في درجة حرارة المائع عند الطبقة القريبة من السطح يمكننا حساب معدل انتقال الحرارة باستخدام معادلة انتقال الحرارة بالتوصيل. إذا كان الأمر هو أن الحرارة تنتقل بالتوصيل عند الطبقة الملاصقة للسطح فلم التحث إذن عن الحمل الحراري؟ الحقيقة هي أن التدرج في درجة حرارة المائع يعتمد اعتماداً مباشراً على سرعة المائع في نقل الحرارة من على السطح ولهذا السبب يمكننا القول أن التدرج في درجة الحرارة عند السطح يعتمد على توزيع سرعة المائع. لذا يجب أن نتذكر دائماً أن انتقال الحرارة عند السطح يتم دائما بالتوصيل كما أن انتقال الحرارة بالحمل دائماً يتطلب حركة المائع *fluid motion*.



الشكل (12): انتقال الحرارة بالحمل من على سطح مستوٍ.

الحمل الحر (الطبيعي) Natural convection

إذا وضعنا لوحاً ساخناً في غرفة بها هواء أبرد من اللوح ولا توجد أي وسيلة لتحريك هذا الهواء فإن الهواء الملامس للوح سوف يسخن فيتحرك إلى أعلى نتيجة لانخفاض كثافته فيلامس طبقات الهواء الباردة التي تعلو اللوح فيبرد وتزداد كثافته فينزل مرة أخرى إلى اللوح الساخن، وهكذا يصعد ويهبط الهواء محدثاً ما يسمى بتيارات الحمل الحر حول اللوح الساخن فتعمل على نقل الحرارة منه إلى الهواء المحيط بدون استخدام اي وسيلة خارجية. لذا يسمى انتقال الحرارة في هذه الحالة بالحمل الحر (الطبيعي).

الحمل القسري (الجبري) Forced convection

أما إذا اســتخدمت وسـيلة ما لتحريك الهواء على الســطح كمروحة مثلاً يصــبح الحمل حملاً جبرياً. هنا يكون لدينا تحكم مباشــر على حركة المائع وبالتالي نســتطيع أن نصــمم منظومات تفي بالتطبيقات المرغوبة في مجال التبريد وتكييف الهواء. يضاف إلى ذلك أنه يكون من الممكن أن نحصل على سرعات أعلى بكثير في حالة الحمل القسري مقارنة بالحمل الطبيعي وبالتالي الحصول على معدلات أكبر لانتقال الحرارة.

قانون نيوتن للتبريد Newton Law of Cooling

وللتعبير عن انتقال الحرارة بالحمل بين سطح ما ومائع يسري حوله نستخدم قانون نيوتن للتبريد:

$$q = h \times A(T_w - T_\infty) \quad (10)$$

حيث أن h هو معامل انتقال الحرارة بالحمل $(W/m^2\,°C)$ و A هي مســاحة ســطح الشــريحة التي تنتقل خلالها الحرارة.

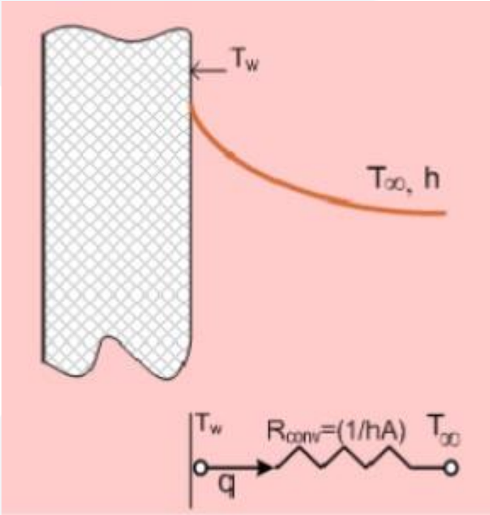
ويمكن كتابة المعادلة السابقة بصيغة المقاومة الحرارية كالتالي:

$$q = \frac{T_w - T_\infty}{\frac{1}{h \times A}} \quad (11)$$

حيث أن $\frac{1}{h \times A}$ هي مقاومة المائع R لانتقال الحرارة. وبالتالي يمكن كتابة المعالة السابقة بالشكل:

$$q = \frac{T_w - T_\infty}{R} \quad (12)$$

يبين الشكل 13 انتقال الحرارة بالحمل من سطح رأسي.



الشكل (13): مقاومة الحمل عند سطح معين.

يبين الجدول 2 بعض قيم معامل انتقال الحرارة بالحمل حسب نوع وحالة المائع.

الجدول 2: بعض قيم معامل انتقال الحرارة بالحمل h

$h\ (W/m^2\,°C)$	نوع الحمل الحراري
25-5	حمل حر (هواء)
500-10	حمل جبري (هواء)
15000-100	حمل جبري (ماء)
25000-2500	غليان مياه
100000-5000	تكثيف بخار

مثال (6):

إذا كان معدل انتقال الحرارة من لوح معدني هو $1000\ W/m^2$ ودرجة حرارة سـطح اللوح $120\,^{\circ}\mathrm{C}$ وكانت درجة حرارة الهواء المحيط $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ احسب معامل انتقال الحرارة بالحمل.

الحل:

نطبق قانون نيوتن بالتبريد:

$$q = h \times A(T_w - T_\infty)$$

$$q/A = h \times (T_w - T_\infty)$$

$$1000 = h \times (120 - 20)$$

$$\rightarrow h = \frac{1000}{100} = 10 \frac{W}{m^2 {}^{\circ}\mathrm{C}}$$

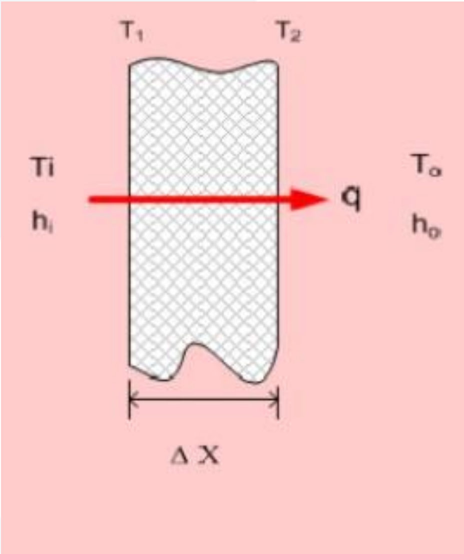
انتقال الحرارة خلال جدار مكون من طبقة واحدة مع وجود حمل داخلي وخارجي

إذا تخيلنا الحائط الموضح بالشكل 14 سـمكه Δx وله معامل انتقال حرارة بالتوصيل k ومعامل انتقال حرارة بالحمل الداخلي h_i والحمل الخارجي h_0 ومساحة سطحه هي A. إذا كانت الحرارة تسري من الداخل إلى الخارج وباستخدام فكرة المقاومة الحرارية يمكن كتابة المعادلات الثلاث التالية لمعدل انتقال الحرارة المستقر:

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_{\text{حمل داخلي}}}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{توصيل}}}$$

$$q = \frac{T_2 - T_o}{R_{\text{حمل خارجي}}}$$



الشكل (14): انتقال الحرارة خلال جدار له حمل داخلي وحمل خارجي.

من المعادلات الســـابقة يمكن اســـتنتاج أن كمية الحرارة المنتقلة من المائع الداخلي إلى المائع الخارجي عبر الجدار تعطى بالمعادلة التالية:

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{conv_i} + R_{cond} + R_{conv_o}} \quad (13)$$

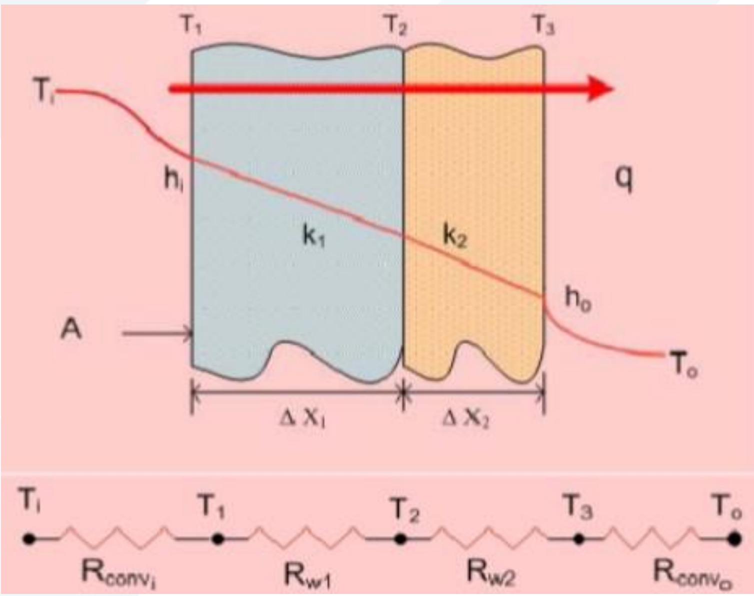
وكما عرفنا سابقاً أن مقاومة الحمل الداخلي $R_{conv_i} = \frac{1}{h_i \times A}$

مقاومة التوصيل لمادة الجدار $R_{cond} = \frac{\Delta x}{k\times A}$

مقاومة الحمل الخارجي $R_{conv_o} = \frac{1}{h_o \times A}$

وعليه لو علمنا الخواص الحرارية والأبعاد ودرجات الحرارة الداخلية والخارجية حول جدار ما يمكن بالتالي حساب معدل انتقال الحرارة من المائع الداخلي إلى المائع الخارجي باستخدام المعادلة 13. أما في حالة الجدار المكون من عدة طبقات مع وجود حمل داخلي وآخر خارجي (الشكل 15) فيمكن وبسهولة استنتاج أن معدل انتقال الحرارة يمكن حسابه بواسطة المعادلو التالية:

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{conv_i} + \sum R_{cond} + R_{conv_o}} \quad (14)$$



الشكل (15): جدار مكون من عدة طبقات مع حمل داخلي وآخر خارجي.