Example

1 - تعطى المعادلة التفاضلية التالية المعبرة عن تغير كمية عنصر مشع - ناتج عن حادثة تشرنوبيل للتسرب النووي - خلال الزمن (بالأيام) :

$$\frac{dy}{dt} = -0.0866y$$

و المطلوب :

a - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة الذي يعطي كمية المادة المشعة بدلالة الزمن (بالأيام)

الحل :

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right]$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dt} + 0.0866y = 0$$

$$\mu(t) = e^{\int 0.0866dt} = e^{0.0866t}$$

$$y = e^{-0.0866t}[0 + c]$$

$$y = c.e^{-0.0866t}$$

b - بالاستفادة من الطلب السابق احسب الزمن (بالأيام) الذي يستغرقه هذا العنصر المشع ليبقى منه نصف كميته الابتدائية (عمر نصف المادة المشعة)؟

الحل :

$$t = 0 \Rightarrow y = y0$$

$$c = y0$$

$$\frac{y0}{2} = y0.e^{-0.0866t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0.0866t}$$

$$\ln(\frac{1}{2}) = \ln(e^{-0.0866t})$$

-0.6931=-0.0866t

t=8 days

Example

2 - تعطى المعادلة التفاضلية التالية المعبرة عن تغير كمية عنصر مشع خلال الزمن (بالأيام)

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

أوجد معدل التلاشي k إذا كان الزمن الذي يستغرقه هذا العنصر المشع ليبقى منه نصف كميته الابتدائية 8 أيام (عمر نصف المادة المشعة) مستخدماً تقنيات حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

الحل:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right]$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

$$\mu(t) = e^{\int kdt} = e^{k.t}$$

$$y = e^{-k.t}[0 + c]$$

$$y = c.e^{-k.t}$$

$$t = 0 \Rightarrow y = y0$$

$$t = 8 \Rightarrow y = \frac{y0}{2}$$

$$\frac{y0}{2} = y0.e^{-k.8}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k.8}$$

$$\ln(\frac{1}{2}) = \ln(e^{-k.8})$$

$$-0.6931 = -k.8$$

k=0.0866