جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

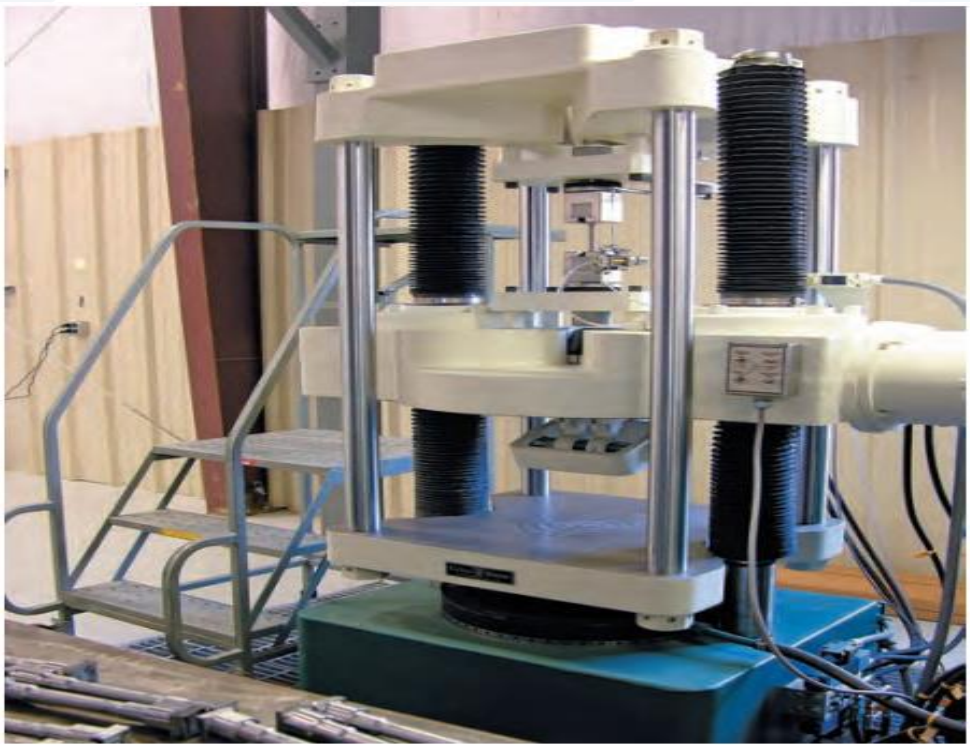
المحاضرة الثالثة –مقاومة المواد

د. نزار عبد الرحمن

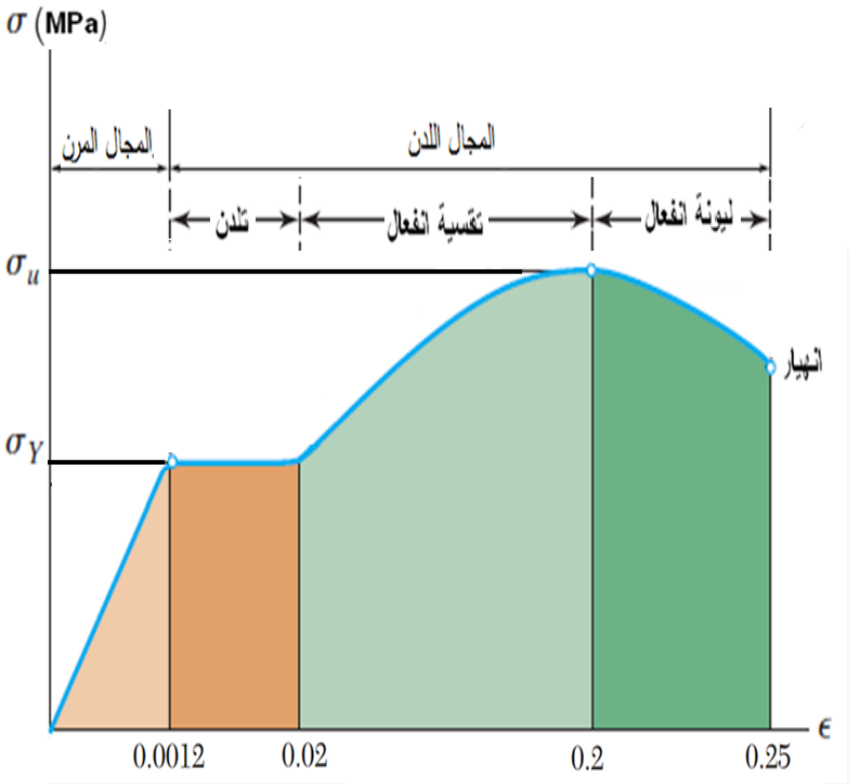
مخطط الاجهاد والانفعال

مقاومة المادة ليست المعيار الوحد الذي يجب أخذه بعين الاعتبار ، حيث تكون الصلابة بنفس الأهمية ، وبدرجة أقل تكون الخواص الأخرى مثل الصلادة والمتانة والمطيلية مؤثرة في اختيار المادة .

ومن أهم الاختبارات التي تجرى على المواد هو اختبار الشد للفولاذ لأنه يساعد في التعرف على عدة مفاهيم أساسية هامة .



جهاز الشد



مخطط الاجهاد – الانفعال للفولاذ

قانون هوك-سلوك المادة المرنة الخطية (constitutive law for Linear Elastic materials):

نفترض أن المادة مرنة متجانسة ومتماثلة الخصائص (Isotropic homogenous elastic material).

المرونة (Elasticity): نقول عن مادة أنها مرنة إذا كانت التشوهات تختفي تماماً عند إزالة الحمولة. يكون سلوك جميع المواد الهندسية مرن خطي ضمن حد معين للإجهاد، إذاً

الانفعالات ضمن هذا الحد تكون متناسبة مباشرة مع الإجهاد (علاقة خطية من الدرجة الأولى نسميها بقانون هوك).

اللدونة : تكون المادة لدنة إذا لم يختفي التشوه بعد إزالة الحمولة.

عندما يتم تحميل العينة بحمولة محورية لا تتجاوز الحد المرن للمادة، ستكون العلاقة بين الإجهاد والانفعال بالشكل:

قانون هوك $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$

حيث E هو معامل المرونة للمادة (معامل يونغ).

معدّل الانفعال هو نسبة الاستطالة δ على الطول الأساسي L.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1)$$

الانفعال في أية نقطة : $$\varepsilon = \frac{d\delta}{dL} \quad (2)$$

$d\delta$ -الاستطالة التفاضلية لطول تفاضلي dL.

وفق شروط معينة يمكننا فرض أن الانفعال ثابتا ، وتحسب قيمته من المعادلة (1).هذه الشروط هي :

1- يجب أن تكون العينة ذات مقطع عرضي ثابت .

2- يجب أن تكون المادة متجانسة .

3- يجب أن يكون الحمل محوريا ، أي ينتج اجهادا منتظما .

يمثّل الانفعال التغير في الطول مقسوما على الطول الأصلي ، وهو كمية بدون وحدة ، ومع ذلك يكتب (متر لكل متر)

حد التناسب :

يكون مخطط الاجهاد – الانفعال خطا مستقيما يصل بين نقطة المبدأ ونقطة أخرى تسمّى "حد التناسب" .

نستنتج من ذلك العلاقة الشهيرة المعروفة باسم " علاقة هوك" التي تعني أن الاجهاد يتناسب مع الانفعال ، مع ملاحظة أن هذا التناسب لا ينطبق على كامل المخطط ، بل ينتهي عند حد التناسب ، حيث يكون الاجهاد بعد هذه النقطة غير متناسبا مع الانفعال .

1 - حد المرونة :

الاجهاد الذي لا تعود بعده المادة إلى شكلها الأصلي بعد زوال الحمل ، بل تحتفظ بتشوه دائم .

2- نقطة الخضوع :

ظاهرة الخضوع مميزة للفولاذ الانشائي ، حيث تحدث استطالة أو خضوع للمادة دون زيادة في الحمل .

3- المقاومة عند نقطة الخضوع :

أقصى إجهاد ينتج عنه استطالة في المادة دون أن يصاحبه زيادة في الحمل .

بعد نقطة الخضوع تحدث زيادة في مقدار التشكل اللدن ، وتصبح المادة أكثر صلادة ، ويكون الحمل كبيراً جداً لإحداث تشكّل في المادة ، وتمثّل النقطة العظمى للمنحني أقصى إجهاد يمكن أن تتحمله المادة (مقاومة الشد).

4- الاجهاد الفعلي وعامل الأمان :

الاجهاد الفعلي هو الاجهاد الحقيقي للمادة تحت تأثير الحمل ، وهو مرادف للاجهاد المسموح به ، والذي يعرّف بأنه أقصى اجهاد آمن يمكن أن تتحمله المادة .

في التصميم الفعلي يجب أن لا تتجاوز الاجهاد المسموح به حد التناسب لكي نحافظ على العلاقة بين الاجهاد والانفعال لقانون هوك .

يمكن تعريف عامل الأمان على أنه النسبة بين الاجهاد الأعظمي المسبب للفشل والاجهاد المسموح به أو اجهاد العمل .يتم قياس الإجهاد الأعظمي تجريبيا ،و نتيجة لعامل الأمان فإنه يتم تخفيض اجهاد العمل المؤثر على المعدن ، أي أن عامل الأمان يمنع انهيار العناصر المختلفة المكونة منها الآلة أو الميكانيزم .

$$F.S = \frac{F_{fail}}{F_{allow}}$$

$F.S$ -عامل الأمان

F_{fail} - الحمولة الأعظمية المسبب للفشل (انهيار المادة).

F_{allow}- الحمولة المسموح بها .

العوامل التي يعتمد عليها عامل الأمان :

1- نوع المعدن .
2- نوع التحميل (ستاتيك ، ديناميكي ، صدمات ...)
3- السعر الاقتصادي (مع زيادة معامل الأمان تزداد الأبعاد والحجوم وبالتالي تزداد التكلفة).
4- أهمية العنصر المفروض ضمن تركيبة الألة أو الميكانيزم .
5- عومل الأمان بالنسبة للحياة البشرية .
6- العمر التشغيلي .

قانون هوك- التشوه المحوري :

من أجل الجزء المستقيم من مخطط الاجهاد – الانفعال ، يكون ميل الخط المستقيم عبارة عن نسبة الاجهاد σ إلى الانفعال ε ، ويسمى هذا الميل بمعامل المرونة ويرمز له بالرمز E:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (3)$$

قانون هوك :

$$\sigma = E.\varepsilon \quad (4)$$

σ - الاجهاد

ε - الانفعال

E- معامل يونغ للمرونة.

من قانون هوك يمكن ملاحظة أن واحدات معامل المرونة مماثلة لواحدات الاجهاد .

نعوض $\sigma = P/A$ و $\delta = \varepsilon /L$

ينتج لدينا العلاقة الشهيرة :

$$\delta = P.L/A.E \quad (5)$$

تعبر العلاقة (5) عن العلاقة بين التشوه الكلّي والحمل المطبق على مساحة المقطع العرضي .

δ – التشوه الكلّي .

P - الحمل المطبّق على الطول

L- الطول

A- مساحة المقطع العرضي

E – معامل المرونة.

عندما تكون العارضة معرضة لعدة قوى محورية على امتداد طولها أو يوجد تغير في مساحة المقطع العرضي ، أو تغيّر في معامل المرونة ، عندها يمكن تطبيق العلاقة (5) على كل جزء من العارضة حيث تكون هذه القيم ثابتة .

يمكن حساب الازاحة لإحدى نهايتي العارضة بالنسبة للطرف الآخر عن طريق الجمع الجبري للإزاحات النسبية لنهايات كل جزء .

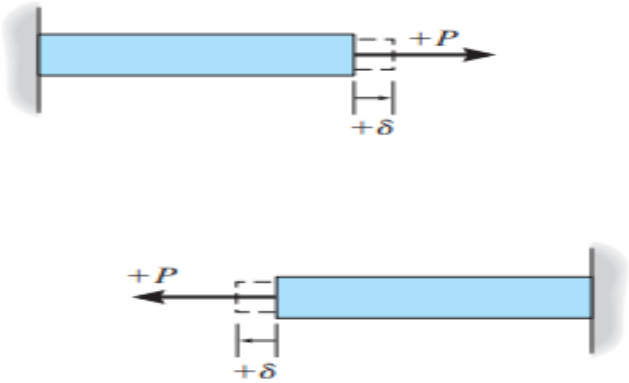
في الحالة العامة نكتب :

$$\delta = \sum \frac{P.L}{A.E} \qquad (6)$$

مصطلح الاشارة :

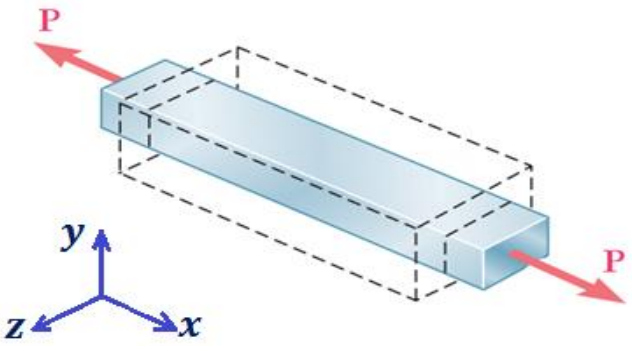
من أجل تطبيق العلاقة (5)و(6) يجب أن يتم الاتفاق على مصطلح اتجاه القوى الداخلية المحورية واتجاهات الازاحة لأحد أطراف العارضة بالنسبة للطرف الآخر ،

نعتبر أن اشارة كلا من القوة والازاحة موجبة إذا تسبّبت القوة بإجهاد شد للعنصر واستطالته ، وبالعكس نعتبر أن اشارة كل من القوة والازاحة سالبة اذا تسبّبت القوة بإجهاد ضغط وتقلّص للعنصر .



Positive sign convention for P and δ

نسبة بواسون ν (Poisson's ratio):



عندما يتعرض عنصر لإجهاد شد باتجاه المحور x سيتطاول في هذا الاتجاه (تشوه ناظمي موجب)، ويترافق هذا بحدوث تقاصر بالاتجاهين y و z، أي سيكون الانفعال بالاتجاه الطولي $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ موجب، بينما سيكون الانفعال العرضي بالاتجاهين y و z سالب ($\varepsilon_y = \varepsilon_z$).

إذاً إشارة الانفعال الناظمي الطولي ($\boldsymbol{\varepsilon_x}$) هي من إشارة الإجهاد الناظمي المطبق

إشارة الانفعال العرضي ($\varepsilon_y = \varepsilon_z$) هي بعكس إشارة الإجهاد الناظمي المطبق

$$\boldsymbol{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}}$$

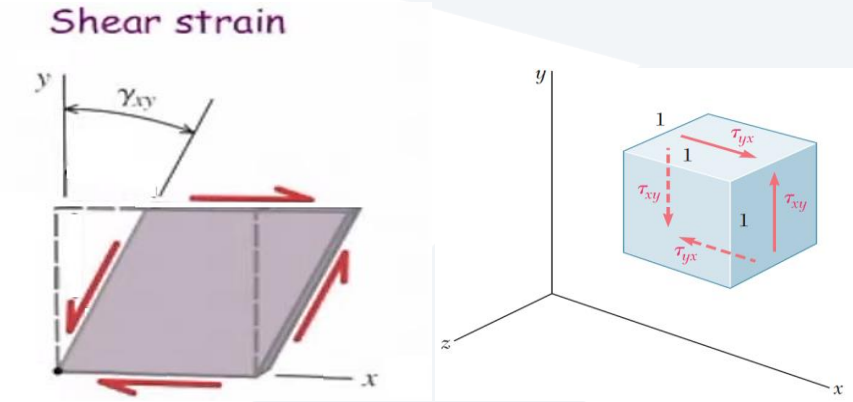
$$\boldsymbol{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \frac{-\nu\sigma_x}{E}}$$

نسمّي نسبة الانفعال العرضي إلى الانفعال الطولي بأنه نسبة بواسون $\boldsymbol{\nu}$.

$$\boldsymbol{0 \le \nu \le 0.5}$$

$$\boldsymbol{\nu = -\frac{\text{الانفعال العرضي}}{\text{الانفعال المحوري}} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}}$$

انفعال القص :



تسبب قوى القص تشوهات قص ، مثل القوى المحورية التي تسبب استطالات مع وجود اختلاف ، حيث يزداد طول العنصر المعرض لقوى شد ، بينما يتعرض العنصر تحت تأثير حمولات القص إلى تغيير في الشكل ، حيث يتحول من مستطيل إلى متوازي أضلاع .

نستطيع حساب معدل القص عن طريق قسمة δs على L

$$tg\gamma = \gamma = \frac{\delta s}{l}$$

يعرّف انفعال القص بأنّه التغير الزاوي بين وجهين متعامدين لعنصر تفاضلي يكون انفعال القص موجب عندما تصغر الزاوية. ويكون سالب عندما تزداد الزاوية.

تكون العلاقة بين اجهاد القص وانفعال القص من الشكل :

$$\tau = G \ .\gamma \quad (7)$$

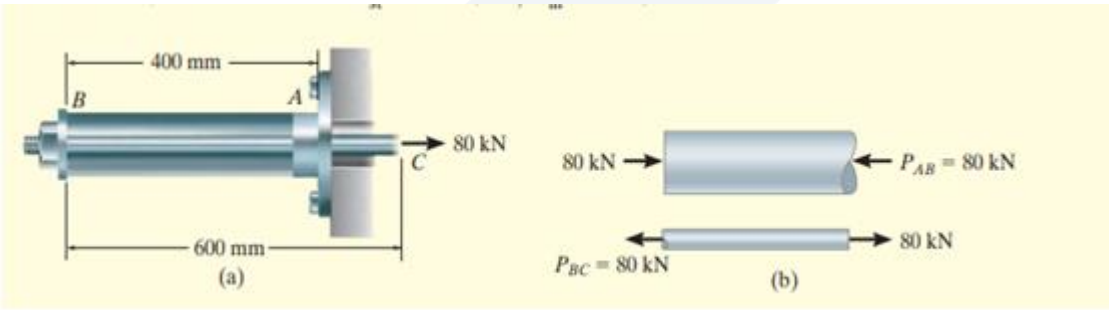
وتكون العلاقة بين تشوه القص δs وقوة القص V وفق الشكل :

$$\delta s = \frac{V.L}{As.G} \quad (8)$$

G – معامل المرونة في القص.

V- قوة القص.

مسألة (1): وصلة مؤلفة من انبوب من الألمنيوم ذو مقطع عرضي 400 mm^2.ومحور من الفولاذ بقطر10mmمتصل بشكل صلب مع دليل ويمر داخل الانبوب ، اذا كانت قوة الشد 80 KNاحسب الازاحة للنهاية C للمحور. اذا كان $E_{St}=200Gpa, E_{al}=70Gpa$



القوى الداخلية : يبين الشكل bمخطط الجسم الحر للأنبوب والقضيب ، حيث يظهر أن الأنبوب معرّض لقوة شد 80KN ، والقضيب معرض لقوة ضغط مقدارها 80 KN.

الازاحة : نحدد أولا مقدار إزاحة النقطة Cبالنسبة للنقطة B. باستخدام الواحدات نيوتن /متر يكون لدينا :

$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{[+80(10^3)\ \text{N}](0.6\ \text{m})}{\pi(0.005\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]} = +0.003056\ \text{m} \rightarrow$$

تدلّ الاشارة الموجبة على أن النقطة C تتحرك نحو اليمين بالنسبة للنقطة B، أي أن االمحور يتمدد .

نحسب إزاحة النهاية Bبالنسبة للنهاية الثابتة A:

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{[-80(10^3)\ \text{N}](0.4\ \text{m})}{[400\ \text{mm}^2(10^{-6})\ \text{m}^2/\text{mm}^2][70(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$
$$= -0.001143\ \text{m} = 0.001143\ \text{m} \rightarrow$$

تدل الاشارة السالبة هنا على أن الأنبوب يتقلص ، أي أن النقطة B تتحرك نحو اليمين بالنسبة للنقطة A.

ينتج أن كلا الازاحتين تتجهان نحو اليمين ، أي أن ازاحة النقطة Cبالنسبة للنهاية الثابتة A تكون :

$$(\pm) \quad \delta_C = \delta_B + \delta_{C/B} = 0.001143\ \text{m} + 0.003056\ \text{m}$$

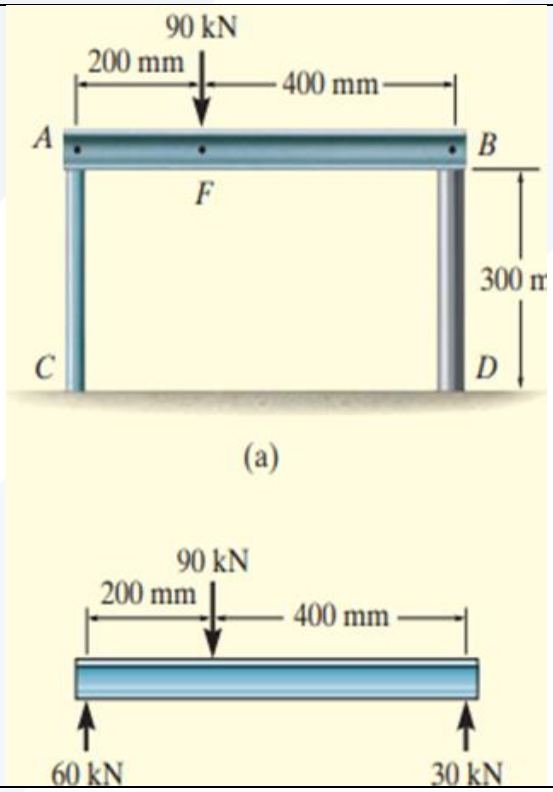
$$= 0.00420\ \text{m} = 4.20\ \text{mm} \rightarrow \quad \textit{Ans.}$$

مسألة (2) :

عارضة صلبة AB تستند على عمودين AC مصنوع من الفولاذ بقطر mm20 ، و BD مصنوع من الألمنيوم بقطر mm 40. احسب قيمة الازاحة للنقطة Fعلى AB إذا كانت الحمولة العمودية المطبقة عند هذه النقطة KN 90، باعتبار E_{al}=70Gpa .

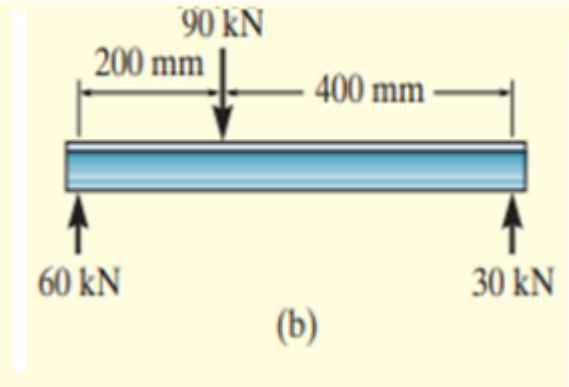
, E_{st} =200Gpa

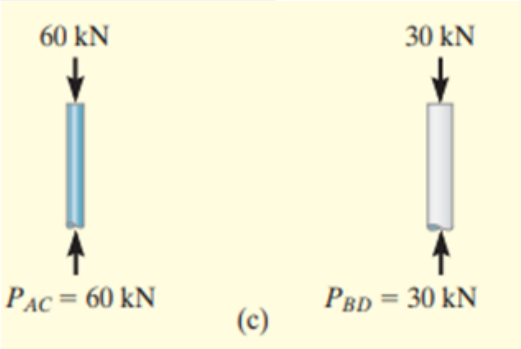
القوى الداخلية : قوة الضغط التي تؤثر على كل من العمودين تساوي ردود الأفعال عند النقطتين A,B للعتبة AB.



الازاحة :

قيمة الازاحة عند رأس كل من العمودين:





$$\delta_A = \frac{P_{AC}L_{AC}}{A_{AC}E_{st}} = \frac{[-60(10^3)\ \text{N}](0.300\ \text{m})}{\pi(0.010\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]} = -286(10^{-6})\ \text{m}$$

$$= 0.286\ \text{mm} \downarrow$$

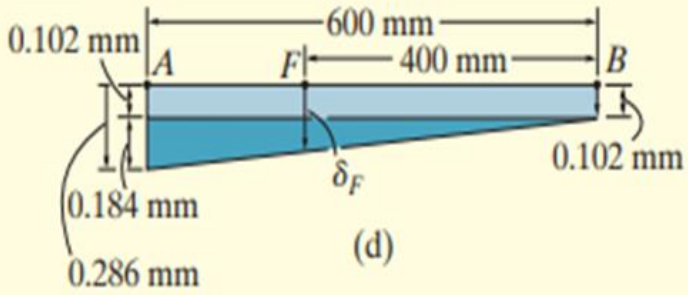
Post *BD*:

$$\delta_B = \frac{P_{BD}L_{BD}}{A_{BD}E_{al}} = \frac{[-30(10^3)\ \text{N}](0.300\ \text{m})}{\pi(0.020\ \text{m})^2[70(10^9)\ \text{N/m}^2]} = -102(10^{-6})\ \text{m}$$

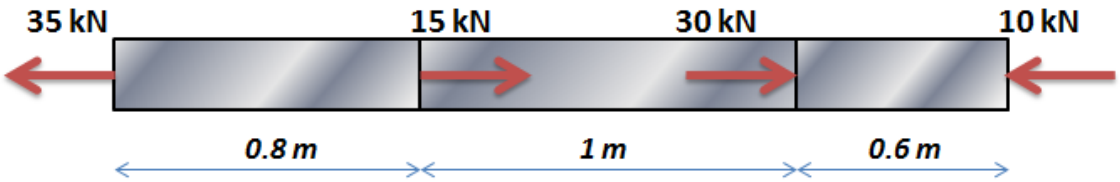
$$= 0.102\ \text{mm} \downarrow$$

يبين الشكل d قيمة الازاحة عند النقاط A,B، يمكننا حساب الازاحة عند النقطة Fعن نسب تشابه المثلثات

$$\delta_F = 0.102\text{ mm} + (0.184\text{ mm})\left(\frac{400\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right) = 0.225\text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$



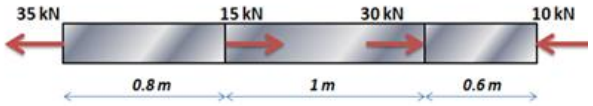
مسألة(3) : عارضة من الألمنيوم ذات مقطع عرضي $160mm^2$ معرضة لحمولة محورية .اذا كانت E=70 Gpa ، احسب التشوه الكلي للعارضة بفرض أن العارضة غير معرضة للتحنيب .



A= 160mm

E= 70Gpa

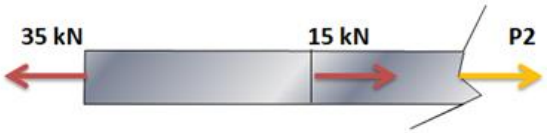
$\boldsymbol{\delta} = ?$



$A = 160mm^2$
$E = 70Gpa$
$\delta = ?$

$$\sum F_X = 0$$

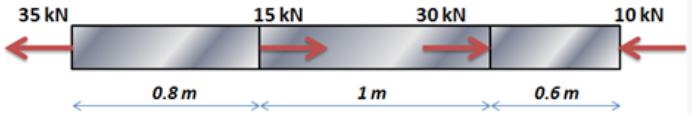
$$P1 - 35 = 0$$
$$P1 = 35\ kN\ \ (+Tension)$$



$$P2 - 35 + 15 = 0$$
$$P2 = 20\ kN\ \ (+Tension)$$

$$P3 - 10 = 0$$
$$P3 = 10\ kN\ \ (-Comprssion)$$

$$P1 = 35\ kN\ \ (+Tension)$$
$$P2 = 20\ kN\ \ (+Tension)$$
$$P3 = 10\ kN\ \ (-Comprssion)$$



$A = 160mm^2$
$E = 70Gpa$
$\delta = ?$

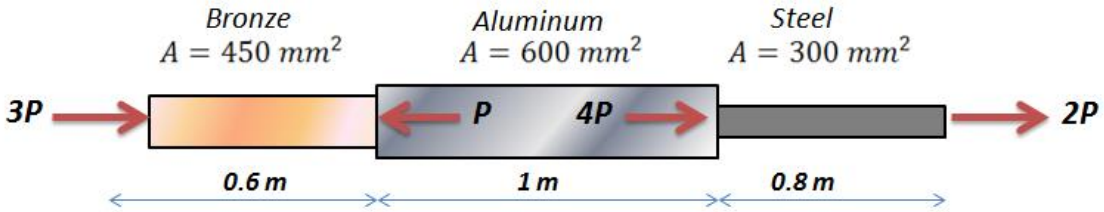
$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \frac{1}{AE}\sum PL$$

$$\delta = \frac{10^3}{(160x10^{-6})(70x10^9)}[35(0.8) + 20(1) - 10(0.6)]$$

$$\delta = 0.00375\ m$$
$$\delta = 3.75\ mm$$

مسألة (4): انبوب من الألمنيوم مثبّت بين قضيبين من الفولاذ والبرونز .يتعرّض لحمولة محورية كما هو مبيّن .احسب القيمة p بحيث لايتجاوز التشوه 2mmو قيم الاجهاد 140Mpa في الفولاذ و80Mpa في الألمنيوم ، والبرونز 120Mpa.



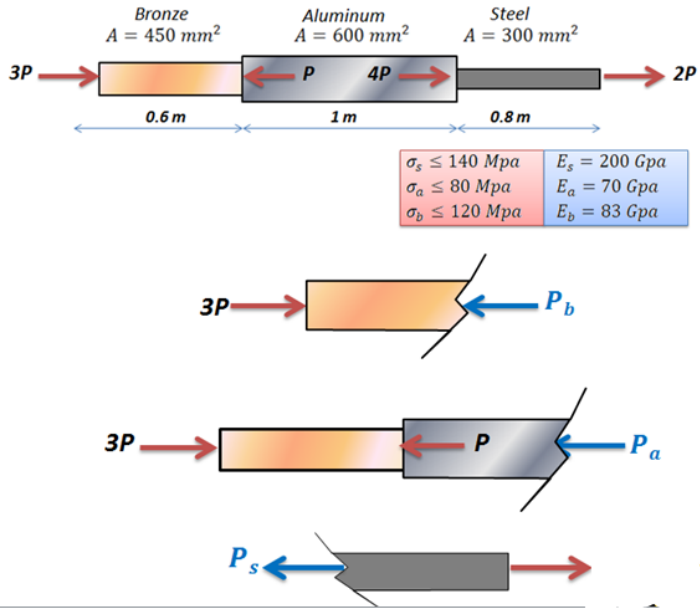
$\sigma_s \leq 140\ Mpa$	$E_s = 200\ Gpa$
$\sigma_a \leq 80\ Mpa$	$E_a = 70\ Gpa$
$\sigma_b \leq 120\ Mpa$	$E_b = 83\ Gpa$

$$\sum F_X = 0$$

$$P_b - 3P = 0$$
$$P_b = 3P\ \ (-compression)$$

$$P_a + P - 3P = 0$$
$$P_a = 2P\ \ (-compression)$$

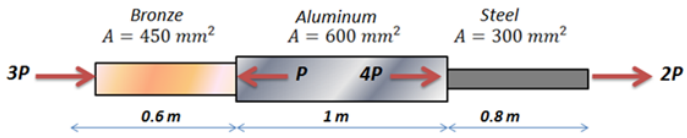
$$P_s - 2P = 0$$
$$P_s = 2P\ \ (+Tension)$$



$P_b = 3P \ \ (-compression)$

$P_a = 2P \ \ (-compression)$

$P_s = 2P \ \ (+Tension)$



$\sigma_s \le 140\ Mpa$	$E_s = 200\ Gpa$
$\sigma_a \le 80\ Mpa$	$E_a = 70\ Gpa$
$\sigma_b \le 120\ Mpa$	$E_b = 83\ Gpa$

Based on allowable deformation:

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

$$0.002 = \frac{1}{(10^{-6})(10^{9})}\left[\frac{-3P(0.6)}{450(83)} - \frac{2P(1)}{600(70)} + \frac{2P(0.8)}{300(200)}\right]$$

$$0.002 = \frac{P}{(10^{-6})(10^{9})}\left[\frac{-3(0.6)}{450(83)} - \frac{2(1)}{600(70)} + \frac{2(0.8)}{300(200)}\right]$$

$$P = -28.9\ kN$$

$$P = 28.9\ kN\ \text{(Contraction)}$$

Based on allowable stresses:

$P = \sigma A$

Bronze:

$3P = (120x10^{6})(450x10^{-6}) = 18\ kN$

Aluminum:

$2P = (80x10^{6})(600x10^{-6}) = 24\ kN$

steel:

$2P = (140x10^{6})(300x10^{-6}) = 21\ kN$

use the smallest value of P,

$P = 18\ kN$

$P_b = 3P \ \ (-compression)$

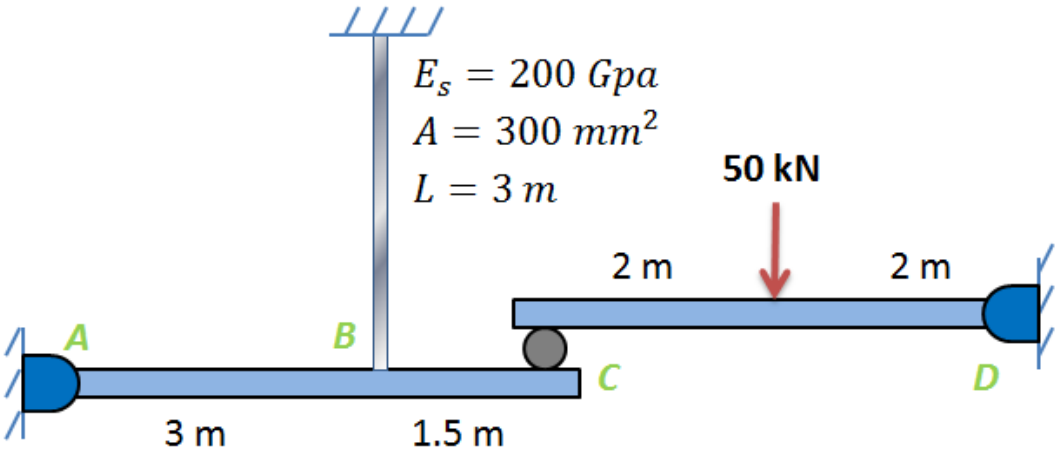
$P_a = 2P \ \ (-compression)$

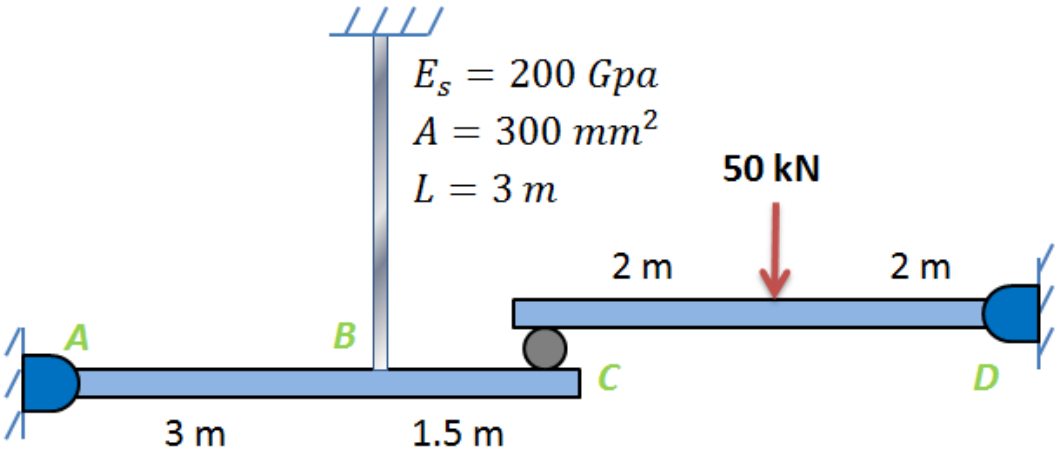
$P_s = 2P \ \ (+Tension)$

$\sigma_s \le 140\ Mpa$	$A = 300\ mm^2$
$\sigma_a \le 80\ Mpa$	$A = 600\ mm^2$
$\sigma_b \le 120\ Mpa$	$A = 450\ mm^2$

$P = 28.9\ kN\ \text{(Contraction)}$

مسألة (5):عارضتين صلبتين منفصلتين بواسطة كرة عند C وذات وصلات مفصلية عند A وD. العارضة الفولاذية معرضة لحمولة 50 KN.احسب ازاحة الكرة عند النقطة C.



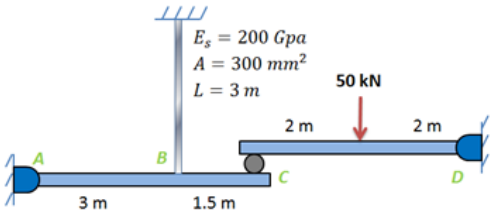


معادلات التوازن الستاتيكي :

$$\sum M_D = 0$$

$$C_y(4) - 50(2) = 0$$

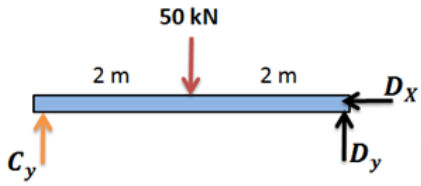
$$C_y = 25\ kN$$

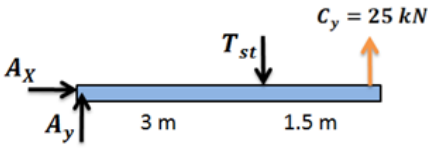


$$\sum M_A = 0$$

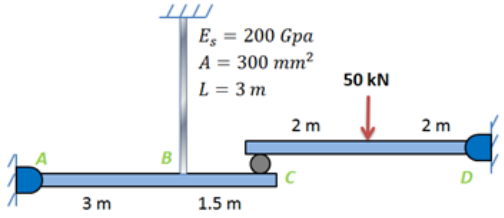
$$25(4.5) - T_{st}(3) = 0$$

$$T_{st} = 37.5\ kN$$



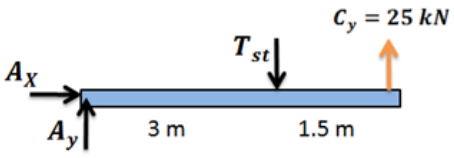


$$T_{st} = 37.5\ kN$$



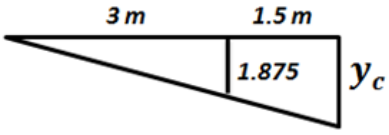
$$\delta_s = \frac{PL}{EA}$$

$$\delta_s = \frac{37.5(3x10^3)}{300(200)} \left(\frac{kN.mm}{\frac{kN}{mm^2}.mm^2}\right)$$



$$\delta_s = 1.875\ mm$$

$$\frac{y_c}{4.5} = \frac{1.875}{3}$$



$$y_c = 2.82\ mm$$