جامعة المنارة

كلية: الهندسة

اسم المقرر: الرياضيات المتقطعة

رقم الجلسة (الرابعة)

عنوان الجلسة

الإسناديات و المكممات

Predicates and Quantifiers

Predicates

- لتكن $p(x) = (x+1 \le 3)$، أوجد قيمة الحقيقة لـ p(0),p(6),p(3)
  - p(3): $3+1 \le 3$ False
  - p(6): $6+1 \le 3$ False
  - p(0): $0+1 \le 3$ True
- لتكن $Q(x) = (x>4)$، أوجد قيمة الحقيقة لـ Q(2),Q(5)
  - Q(5): $5>4$ True
  - Q(2): $2>4$ False
- لتكن $p(x,y) = (x \neq y+3)$، أوجد قيمة الحقيقة لكل من p(1,2) ,p(3,0)
  - p(3,0): $3 \neq 0+3$ False
  - p(1,2): $1 \neq 2+3$ True
- لتكن Q(x,y) =(x is the capital of y) ، أوجد قيمة الحقيقة لكل من Q(Damascus,Syria),Q(Baghdad,Lebanon)
  - Q(Damascus,Syria): Damascus is the capital of Syria True
  - Q(Baghdad,Lebanon): Baghdad is the capital of Lebanon False

Universal quantifier($\forall$)

- ليكن $p(x)=(x+1>x)$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\, p(x)$.

إن العبارة $P(x)$ صحيحة من أجل كل الأعداد الحقيقية x ، بالتالي التكميم الشمولي $\forall x\, p(x)$ يكون صحيح True .

- ليكن $p(x)=(x^2>0)$ ومجال التعريف هو مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\, p(x)$.

إن $p(x)$ تكون خاطئة من أجل $x=0$، و بالتالي $p(x)$ ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح و تكون قيمة التكميم False .

- ليكن $p(x)=(x^2 < 10)$ و مجال التعريف هو $D=\{1,2,3,4\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\, p(x)$.

إن $p(x)$ تكون خاطئة من أجل $x=4$ ، و بالتالي $p(x)$ ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح في المجموعة D و تكون قيمة التكميم False .

Existence quantifier(∃)

- ليكن $p(x)=(x>3)$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$

إن $x>3$ صحيحة من أجل عدة قيم في المجموعة R ، مثلاً يوجد $x=4$ تكون $p(4):4>3$ صحيحة ، و بالتالي قيمة التكميم الوجودي $\exists x\, p(x)$ صحيحة True .

- ليكن $p(x)=(x+1=x)$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$.

إن $p(x)$ خاطئة من أجل كل قيمة x من R ، و بالتالي لايوجد عنصر يحقق هذه العبارة و تكون قيمة التكميم الوجودي False .

- ليكن $p(x)=(x^2 < 10)$ ، و مجال التعريف هو$D=\{1,2,3,4\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$.

يوجد على الأقل $x=3 \in D$ تحقق العلاقة $3^2 < 10$ وبالتالي قيمة التكميم الوجودي True .

أوجد مثالاً معاكساً (counter example) يثبت أن قيمة الحقيقة للعبارات التالية المكممة شمولياً False :

- $\forall x \in R, x > \frac{1}{x}$

من أجل x=1 فإن العبارة 1>1/1 تكون خاطئة False .

- $\forall x \in Z , \frac{(a-1)}{a}$ *is not an integer*

من أجل x=-1 فإن 2∈Z = $\frac{(-1-1)}{-1}$ و بالتالي عبارة التكميم خاطئة False .

- ∀ positive integers n and m, n.m≥ $n + m$

من أجل n=1,m=1 تكون العبارة 1.1 ≥1+1 خاطئة False .

Predicates and Quantifiers

Let $D = \{-48, -14, -8, 0, 1, 3, 16, 23, 26, 32, 36\}$. Determine which of the following statements are true and which are false. Provide counterexamples for those statements that are false.

a. $\forall x \in D$, if x is odd then $x > 0$.

b. $\forall x \in D$, if x is less than 0 then x is even.

c. $\forall x \in D$, if x is even then $x \leq 0$.

d. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 2, then the tens digit is 3 or 4.

e. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 6, then the tens digit is 1 or 2.

Solution:

a. True

b. True

c. False, $\exists x = 16 \in D$ is even but $x > 0$

d. True

e. False , $\exists x = 36 \in D$,ones digit=6 but tens digit=3

- Let D={-2,-1,0,1,2} , p(x,y)=(x+y>3)

Write the truth value of the following statements:

1- $\forall x\, p(x,2)$

False , ∃x=-2 ∈ D : p(-2,2)=(-2+2<3)=(0<3)

2- ∃x p(x,3)

True , ∃x=2∈ D : p(2,3)=(2+3>3)=(5>3)

3- ∃x p(x,y)

Not proposition , because y is not bound by a quantifier or value.

4- $\forall x \forall y\, p(x,y)$

False , ∃x=0∈ D , ∃y=1∈ D : p(0,1)=(0+1<3)=(1<3)

Let $D = E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Explain why the following statements are true.

a. $\forall x$ in D, $\exists y$ in E such that $x + y = 0$.

b. $\exists x$ in D such that $\forall y$ in E, $x + y = y$.

Solution:

a. $\forall$x in D, $\exists$y = -x in E : x+y=x+(-x)=0

b. $\exists$x = 0 in D, $\forall$y in E : 0+y=y

Negating quantifications

Negation	Equivalent Statement
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$

مثال1 : (”X من مواليد 2003”)=p(x) ومجال التعريف : مجموعة طلاب الصف

كل طالب في الصف من مواليد عام 2003 $\forall x\, p(x)$

ما هو نفي العبارة السابقة ؟

نفي العبارة : يوجد على الأقل طالب في الصف ليس من مواليد عام 2003،و يعبر عنه بعبارة التكميم التالية: $\neg\forall x\, p(x) = \exists x \neg p(x)$

مثال2 : (”X من مواليد 2003”) =p(x) ومجال التعريف : مجموعة طلاب الصف

يوجد طالب في الصف من مواليد عام 2003 $\exists x\, p(x)$

ما هو نفي العبارة السابقة؟

نفي العبارة :كل طالب في الصف ليس من مواليد 2003،و يعبر عنه بعبارة التكميم التالية : $\neg\exists x\, p(x) = \forall x \neg p(x)$

Negating quantifications

أوجد نفي العبارتين :

- $\neg \forall x \, (x^2 > x)$

$$\neg \forall x \, (x^2 > x) \equiv \exists x \, (x^2 \leq x)$$

- $\neg \exists x \, (x^2 = x)$

$$\neg \exists x \, (x^2 = x) \equiv \forall x \, (x^2 \neq x)$$

Nested quantifiers

أوجد قيمة الحقيقة لعبارات التكميم التالية مع التعليل ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

- $\forall n \exists m \ (n^2 < m)$

True ، من أجل كل عدد صحيح n يوجد عدد m أكبر من مربعه

- $\forall n \exists m \ (n + m = 0)$

True ، من أجل كل قيمة n يوجد قيمة m=-n بحيث n+m=0 .

- $\forall n \forall m \ (n^3 \neq m^2)$

False ، يوجد n=1,m=1 تكون $1^3 = 1^2$

- $\exists n \forall m \ (nm = m)$

True ، من أجل n=1 فإنه أياً كانت m فإن 1*m=m

Nested quantifiers

أوجد قيمة الحقيقة لعبارات التكميم التالية مع التعليل ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

- $\exists n \exists m \; (n^2 + m^2 = 5)$

True ، يوجد n=1,m=2 تحقق عبارة التكميم

- $\forall n \forall m \; (n + m = m + n)$

True ، من أجل كل عددين $n,m \in Z$ تتحقق علاقة الجمع التبديلية

- $\exists n \forall m \; (n < m^2)$

True ، محققة من أجل n=-1 فإن مربع أي قيمة m موجب و أكبر من n

- $\forall n \forall m \; (if \; n^2 = m^2 \, , then \; n = m)$

False ، يوجد n=-2,m=2 تكون $(-2)^2 = 2^2$ و لكن $-2 \neq 2$

Nested quantifiers

Suppose the universe is the collection of numbers (1,2,3,4,5) and the following grid gives the truth value of the proposition P(X,Y) where x is the row and y is the column

P	1	2	3	4	5
1	p(1,1): T	F	F	T	T
2	p(2,1):T	F	T	T	T
3	F	F	T	T	T
4	F	T	F	T	F
5	T	F	T	T	T

1- $\forall x \, \exists y \; p(x, y)$: True
2- $\exists y \, \forall x \; p(x, y)$: True
3- $\forall y \, \exists x \; p(x, y)$: True
4- $\exists x \, \forall y \; p(x, y)$: False

Negating Nested quantifiers

- $\neg(\forall x \forall y\, p(x,y)) \equiv \exists x \exists y \neg p(x,y)$
- $\neg(\forall y \exists x\, p(x,y)) \equiv \exists y \forall x \neg p(x,y)$
- $\neg(\forall y \forall x\, [p(x,y) \vee Q(x,y)]) \equiv \exists y \exists x \neg (p(x,y) \vee Q(x,y))$
  $\equiv \exists y \exists x\, (\neg p(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$

Negating Nested quantifiers

جَـامعة
الْمَـنارة

Let $D = E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Write negations for each of the following statements

a. $\forall x$ in D, $\exists y$ in E such that $x + y = 1$.

b. $\exists x$ in D such that $\forall y$ in E, $x + y = -y$.

Solution:

a. $\exists$x in D,$\forall$y in E : x+y$\neq$ 1

b. $\forall$x in D,$\exists$y in E : x+y $\neq$ -y

Predicates and Quantifiers

Translate from English statements to quantified statements

- the sum of two positive integers is always positive.
- $\forall x \in Z\ \forall y \in Z$, (x>0)∧(y>0)⟶ $(x + y > 0)$
- There is a real number whose square equals 5.
- $\exists x \in$ R , (x^2=5)
- The square of real number is greater than or equal 0.
- $\forall x \in$ R , $(x^2 \geq 0)$
- If an integer is divisible by 2 , then it is even.
- $\forall x \in Z$, (x is divisible by 2 $\longrightarrow x\ is\ even$)
- A product of two real numbers is 0 if one of number is 0.
- $\forall x \in R\ \forall y \in R$, (x=0)∨(y=0)⟶ $(xy = 0)$

Predicates and Quantifiers

Translate from English statements to quantified statements

- The difference between two positive integers is not necessarily positive
- $\exists x \in Z\ \exists y \in Z$, (x>0)∧(y>0)∧ $(x - y < 0)$
- Every positive real numbers has exactly two square roots.
- $\forall x \in R$, (x>0) ⟶ x has two square roots
- For every odd integer number n ,there is integer number k :n=2k+1
- $\forall n \in Z\ \exists k \in Z$, $(n\ is\ odd)$ ⟶ (n=2k+1)
- The product of two negative real numbers is positive.
- $\forall x \in R\ \forall y \in R$, (x<0)∧(y<0)⟶ $(xy > 0)$
- For every non zero real number n,there is real number m : nm=1.
- $\forall n \in R\ \exists m \in R$, $(n \neq 0)$ ⟶(nm=1)

homework

. Determine the truth value of each of these statements if the domain consists of all real numbers.

a) $\exists x(x^3 = -1)$

b) $\exists x(x^4 < x^2)$

c) $\forall x((-x)^2 = x^2)$

d) $\forall x(2x > x)$

. Determine the truth value of each of these statements if the domain for all variables consists of all integers.

a) $\forall n(n^2 \geq 0)$

b) $\exists n(n^2 = 2)$

c) $\forall n(n^2 \geq n)$

d) $\exists n(n^2 < 0)$

. Determine the truth value of each of these statements if the domain of each variable consists of all real numbers.

a) $\exists x(x^2 = 2)$

b) $\exists x(x^2 = -1)$

c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$

d) $\forall x(x^2 \neq x)$

homework

Let $Q(x, y)$ be the statement "$x+y = x-y$". If the universe of discourse for both variables is the set of integers, what are the truth values of the following?

a) $Q(1, 1)$

b) $Q(2, 0)$

c) $\exists x\ Q(x, 2)$

d) $\exists y \forall x\ Q(x, y)$

Prove your answers.