التحليل الرياضي ١

المحاضرة 5+6

ميكاترونيكس

عملي

Prepared by
Dr. Sami INJROU

التقعر ونقاط الانعطاف

تمارين

1 أوجد إحداثيات القيم القصوى ونقاط الانعطاف لكل من التوابع الآتية:

- $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
- $y = x(6 - 2x)^2$
- $y = x^3 - 3x + 3$

2 أوجد قيم كل من الثوابت a, b, c حتى يكون للتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx$ قيمة عظمى محلية في $x = 3$ وقيمة صغرى محلية في $x = -1$ ونقطة انعطاف في $(1, 11)$.

تمارين

1 أوجد إحداثيات القيم القصوى ونقاط الانعطاف لكل من التوابع الآتية:

- $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
- $y = x(6 - 2x)^2$
- $y = x^3 - 3x + 3$

الحل

$y = x^3 - 3x + 3$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

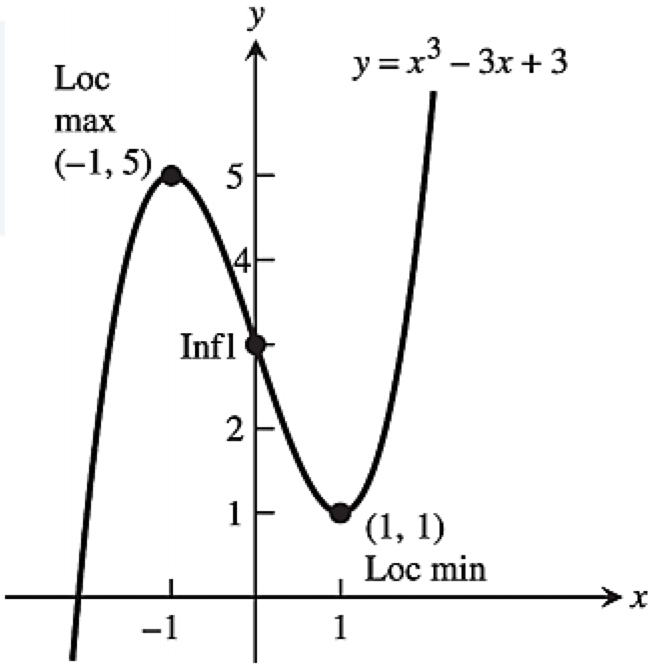
النقاط الحرجة هي $x = -1$ و $x = 1$

نوجد المشتق الثاني $y'' = 6x$

النقطة	$(-1,5)$	$(1,1)$
إشارة المشتق الثاني	$y''(-1) < 0$	$y''(1) > 0$
النتيجة	نقطة قيمة عظمى محلياً	نقطة قيمة صغرى محلياً

نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 0$

تمارين



المجال	$0 < x < \infty$	$-\infty < x < 0$
نقطة اختبار	$x = 1$	$x = -1$
إشارة المشتق الثاني	$y''(1) > 0$	$y''(-1) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

نقطة الانعطاف هي $(0,3)$

$y = x(6 - 2x)^2$

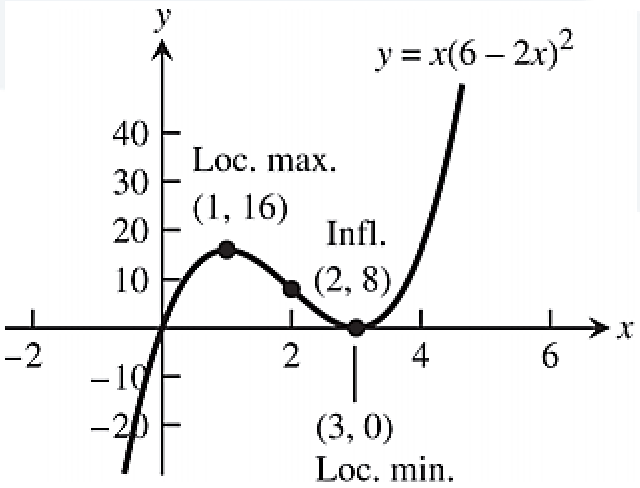
$y' = -4x(6-2x) + (6-2x)^2 = 12(3-x)(1-x)$

النقاط الحرجة هي $x = 1$ و $x = 3$

نوجد المشتق الثاني $y'' = -12(3-x) - 12(1-x) = 24(x-2)$

النقطة	$(1,16)$	$(3,0)$
إشارة المشتق الثاني	$y''(1) < 0$	$y''(3) > 0$
النتيجة	نقطة قيمة عظمى محلياً	نقطة قيمة صغرى محلياً

تمارين



$$y = -2x^3 + 6x^2 - 3$$

$$y' = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$$

النقاط الحرجة هي $x = 0$ و $x = 2$

نوجد المشتق الثاني $y'' = -12x + 12 = -12(x-1)$

النقطة	$(0,-3)$	$(2,5)$
إشارة المشتق الثاني	$y''(0) > 0$	$y''(2) < 0$
النتيجة	نقطة قيمة صغرى محلياً	نقطة قيمة عظمى محلياً

نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 2$

المجال	$2 < x < \infty$	$-\infty < x < 2$
نقطة اختبار	$x = 3$	$x = -1$
إشارة المشتق الثاني	$y''(3) > 0$	$y''(-1) < 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأسفل

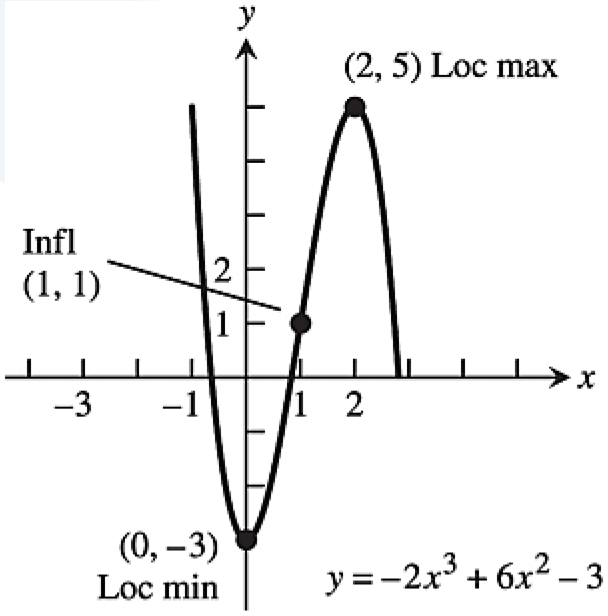
نقطة الانعطاف هي $(2,8)$

تمارين

نلاحظ أن المشتق الثاني ينعدم عندما $x = 1$

المجال	$1 < x < \infty$	$-\infty < x < 1$
نقطة اختبار	$x = 3$	$x = 0$
إشارة المشتق الثاني	$y''(3) < 0$	$y''(0) > 0$
النتيجة	مقعر نحو الأسفل	مقعر نحو الأعلى

نقطة الانعطاف هي $(1,1)$



2 أوجد قيم كل من الثوابت a, b, c حتى يكون للتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx$ قيمة عظمى محلية في $x = 3$ وقيمة صغرى محلية في $x = -1$ ونقطة انعطاف في $(1, 11)$.

الحل

$$y = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \qquad y'' = 6ax + 2b$$

تمارين

للتابع قيمة عظمى محلية في $x=3$

$$\Rightarrow 3a(3)^2+2b(3)+c=0 \Rightarrow 27a+6b+c=0$$

للتابع قيمة صغرى محلية في $x=-1$

$$\Rightarrow 3a(-1)^2+2b(-1)+c=0 \quad \Rightarrow 3a-2b+c=0$$

للتابع نقطة انعطاف في $(1,11)$

$$6a(1)+2b=0 \Rightarrow 6a+2b=0.$$

$$\Rightarrow a(1)^3+b(1)^2+c(1)=11 \Rightarrow a+b+c=11$$

بحل جملة المعادلات الجبرية الخطية الآتية

$$27a+6b+c=0$$
$$3a-2b+c=0$$
$$a+b+c=11$$
$$6a+2b=0$$

نحصل على $a=-1, b=3\ c=9$ ، وبالتالي يكون التابع $y=-x^3+3x^2+9x$

التكامل

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
- $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$
- $\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$

2 احسب التكاملات الآتية:

- $\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$
- $\int_{\pi/2}^0 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$
- $\int_1^8 \frac{(x^{1/3} + 1)(2 - x^{2/3})}{x^{1/3}} dx$

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
- $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$
- $\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$

الحل

$$\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$$

$$\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int\left(x^{1/2}+x^{1/3}\right)dx=\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{4}x^{4/3}+C$$

$$\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$$

$$\int\frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2}dt=\int\left(\frac{t^{3/2}}{t^2}+\frac{t^{1/2}}{t^2}\right)dt=\int\left(t^{-1/2}+t^{-3/2}\right)dt=\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\left(\frac{t^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right)+C=2\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+C$$

$$\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$$

$$\int\frac{1+\cos 4t}{2}dt=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}+C$$

تمارين

2 احسب التكاملات الآتية:

- $\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$
- $\int_{\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$
- $\int_1^8 \frac{(x^{1/3} + 1)(2 - x^{2/3})}{x^{1/3}} dx$

الحل

$\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$

$$\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) - 0 = 1$$

$\int_{\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$

$$\int_{\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int_{\pi/2}^{0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/2}^{0} = \left(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}\sin 2(0)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

تمارين

$$\int_1^8 \frac{(x^{1/3}+1)(2-x^{2/3})}{x^{1/3}}$$

$$\int_1^8 \frac{\left(x^{1/3}+1\right)\left(2-x^{2/3}\right)}{x^{1/3}}\,dx = \int_1^8 \frac{2x^{1/3}-x+2-x^{2/3}}{x^{1/3}}\,dx = \int_1^8 (2-x^{2/3}+2x^{-1/3}-x^{1/3})\,dx$$

$$= \left[2x-\tfrac{3}{5}x^{5/3}+3x^{2/3}-\tfrac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^3$$

$$=\left(2(8)-\tfrac{3}{5}(8)^{5/3}+3(8)^{2/3}-\tfrac{3}{4}(8)^{4/3}\right)-\left(2(1)-\tfrac{3}{5}(1)^{5/3}+3(1)^{2/3}-\tfrac{3}{4}(1)^{4/3}\right)=-\frac{137}{20}$$

التكامل
طريقة التعويض

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int 2x(x^2+5)^{-4}\,dx,$
- $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\,dx,$
- $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx,$
- $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\,dx$

2 احسب التكاملات الآتية:

- $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$
- $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}dv$
- $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$
- $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int 2x(x^2+5)^{-4}\,dx,$
- $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\,dx,$
- $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx,$
- $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\,dx$

الحل

$\int 2x(x^2+5)^{-4}\,dx,$ $\quad u=x^2+5 \Rightarrow du=2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}du=x\,dx$

$$\int 2x(x^2+5)^{-4}dx=\int 2u^{-4}\frac{1}{2}du=\int u^{-4}du=-\frac{1}{3}u^{-3}+C=-\frac{1}{3}(x^2+5)^{-3}+C$$

$\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\,dx,$ $\quad u=3x^2+4x \Rightarrow du=(6x+4)dx=2(3x+2)dx \Rightarrow \frac{1}{2}du=(3x+2)dx$

$$\int (3x+2)(3x^2+4x)^4dx=\int u^4\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^4du=\frac{1}{10}u^5+C=\frac{1}{10}(3x^2+4x)^5+C$$

تمارين

$$\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx,\qquad u=x^{3/2}-1 \Rightarrow du=\tfrac{3}{2}x^{1/2}dx \Rightarrow \tfrac{2}{3}du=\sqrt{x}\,dx$$

$$\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx=\int \tfrac{2}{3}\sin^2 u\,du=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{u}{2}-\tfrac{1}{4}\sin 2u\right)+C=\tfrac{1}{3}(x^{3/2}-1)-\tfrac{1}{6}\sin(2x^{3/2}-2)+C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\,dx$$

$$u=2-\tfrac{1}{x} \Rightarrow du=\tfrac{1}{x^2}dx$$

$$\int \tfrac{1}{x^2}\sqrt{2-\tfrac{1}{x}}\,dx=\int \sqrt{u}\,du=\int u^{1/2}du=\tfrac{2}{3}u^{3/2}+C=\tfrac{2}{3}\left(2-\tfrac{1}{x}\right)^{3/2}+C$$

تمارين

2 احسب التكاملات الآتية:

- $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$
- $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}dv$
- $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$
- $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

الحل

$\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ $\quad u=1+t^4 \Rightarrow du=4t^3dt \Rightarrow \frac{1}{4}du=t^3dt; t=0 \Rightarrow u=1, t=1 \Rightarrow u=2$

$$\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt=\int_1^2 \frac{1}{4}u^3\,du=\left[\frac{u^4}{16}\right]_1^2=\frac{2^4}{16}-\frac{1^4}{16}=\frac{15}{16}$$

$\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}dv$ $\quad u=1+v^{3/2} \Rightarrow du=\frac{3}{2}v^{1/2}\,dv \Rightarrow \frac{20}{3}du=10\sqrt{v}\,dv; v=0 \Rightarrow u=1, v=1 \Rightarrow u=2$

$$\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv=\int_1^2 \frac{1}{u^2}\left(\frac{20}{3}\,du\right)=\frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}\,du=-\frac{20}{3}\left[\frac{1}{u}\right]_1^2=-\frac{20}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right]=\frac{10}{3}$$

تمارين

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$$

$$u = x^4 + 9 \Rightarrow du = 4x^3\ dx \Rightarrow \tfrac{1}{4}du = x^3\ dx;\ x = 0 \Rightarrow u = 9,\ x = 1 \Rightarrow u = 10$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\ dx = \int_9^{10} \frac{1}{4} u^{-1/2}\ du = \left[\tfrac{1}{4}(2)u^{1/2}\right]_9^{10} = \tfrac{1}{2}(10)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(9)^{1/2} = \frac{\sqrt{10}-3}{2}$$

$$\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$$

$$u = 1+\sqrt{y} \Rightarrow du = \frac{dy}{2\sqrt{y}};\ y = 1 \Rightarrow u = 2,\ y = 4 \Rightarrow u = 3$$

$$\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2} = \int_2^3 \frac{1}{u^2}\ du = \int_2^3 u^{-2}\ du = [-u^{-1}]_2^3 = \left(-\tfrac{1}{3}\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{6}$$

التكامل
التكامل بالتجزئة

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int x^2 \sin x \, dx$
- $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$
- $\int \sin^{-1} y \, dy$

الحل

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{lcl} & & \sin x \\ x^2 & \xrightarrow{(+)} & -\cos x \\ 2x & \xrightarrow{(-)} & -\sin x \\ 2 & \xrightarrow{(+)} & \cos x \\ 0 & & \end{array}$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

تمارين

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx$$

$$u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x};\ dv = x^3\ dx,\ v = \frac{x^4}{4};$$

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} = \frac{e^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e = \frac{3e^4+1}{16}$$

$$\int \sin^{-1} y \, dy$$

$$u = \sin^{-1} y,\ du = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}};\ dv = dy,\ v = y;$$

$$\int \sin^{-1} y\, dy = y\sin^{-1} y - \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = y\sin^{-1} y + \sqrt{1-y^2} + C$$

التكامل
تكامل التوابع المثلثية

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية:

- $\int \cos^3 x \sin x \, dx$
- $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$
- $\int 16 \sin^2 x \cos^2 x \, dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 3x \, dx$
- $\int \cos 3x \cos 4x \, dx$

الحل

$\int \cos^3 x \sin x \, dx$

$$\int \cos^3 x \sin x \, dx = -\int \cos^3 x(-\sin x)\, dx = -\tfrac{1}{4}\cos^4 x + C$$

$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x \, dx$$

$$= \int \sin^3 x \cos x \, dx - \int \sin^5 x \cos x \, dx = \tfrac{1}{4}\sin^4 x - \tfrac{1}{6}\sin^6 x + C$$

$\int 16 \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$$= 16\int \left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\right) dx = 4\int \left(1 - \cos^2 2x\right) dx = 4\int dx - 4\int \left(\tfrac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= 4x - 2\int dx - 2\int \cos 4x \, dx = 4x - 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x + C = 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x + C = 2x - \sin 2x \cos 2x + C$$

$$= 2x - 2\sin x \cos x \,(2\cos^2 x - 1) + C = 2x - 4\sin x \cos^3 x + 2\sin x \cos x + C$$

تمارين

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 3x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 0 - \cos 6x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 6x \, dx = \tfrac{1}{2}\Big[x - \tfrac{1}{12}\sin 6x\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

$$\int \cos 3x \cos 4x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (\cos(-x) + \cos 7x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int (\cos x + \cos 7x)\, dx = \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{1}{14}\sin 7x + C$$