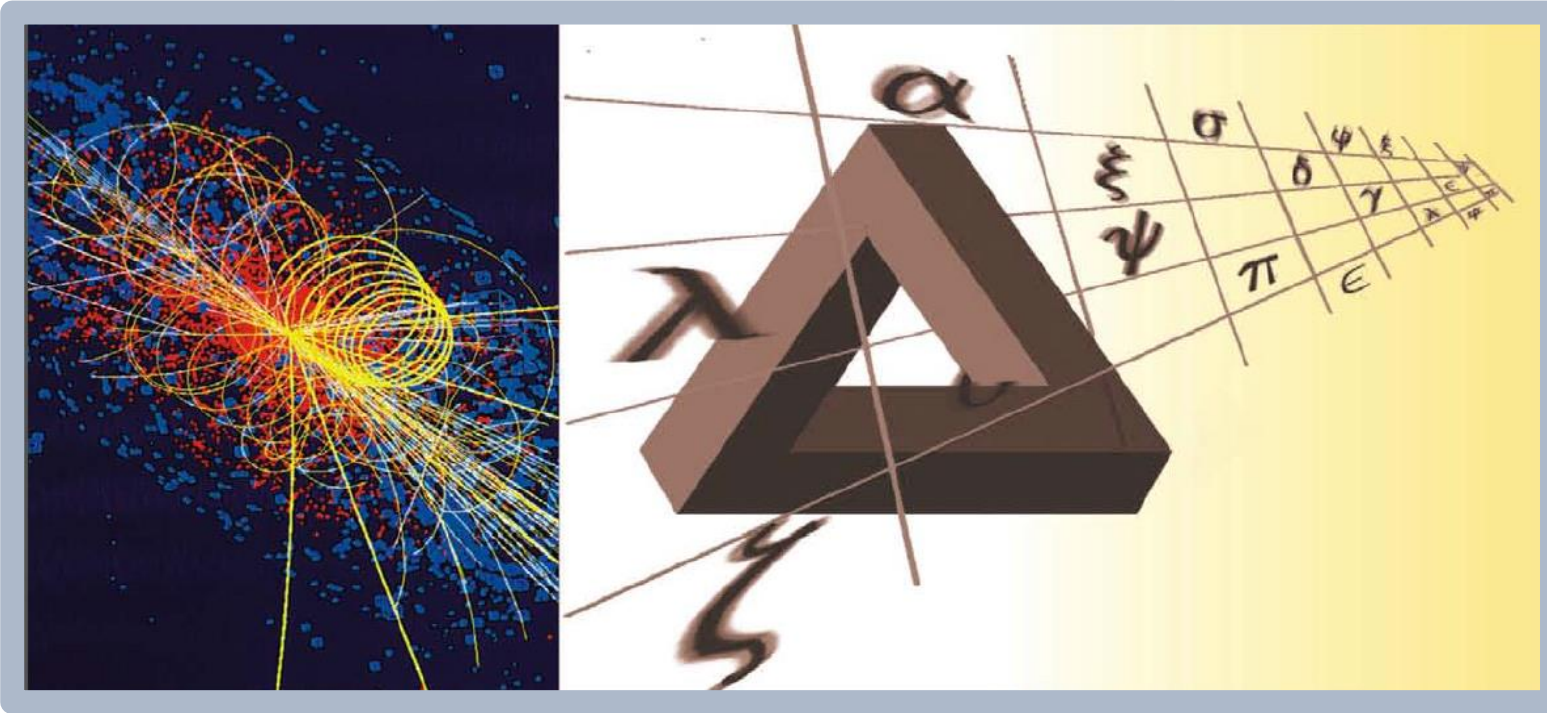


Introduction to Numerical Math



العام الدراسي 2024-2025

د. محمد خير عبد الله محمد

Contents

1. مقدمة
2. تعريف برنامج Matlab-Simulink
3. Linear Equations
4. Nonlinear Equations

مقدمة



الحل التحليلي هو الحل الرياضي المستند إلى علاقات و معادلات تصف سلوك الظاهرة المدروسة بدقة و التي تعطي في النهاية حلاً مغلقاً و نهائياً للمشكلة المطروحة.

الحل العددي هو الحل المعتمد على تصميم خوارزميات لمعالجة المسائل التي يصعب حلها بالطرق التحليلية ويتم ذلك باستخدام الحاسب.

يمكن النظر إلى الحل العددي لأي مشكلة على أنه خطوة من خطوات محاكاة هذه المشكلة على الحاسب. وهذه المحاكاة تعتبر ميزة عظيمة في دراسة أداء الحل المقدم تحت الظروف والأحوال المختلفة

كما أن هذه المحاكاة تمكننا من اختبار الحل في ظروف يصعب فرضها في الوضع الطبيعي حيث قد تحتاج إلى تكلفة عالية و وقت كبير.

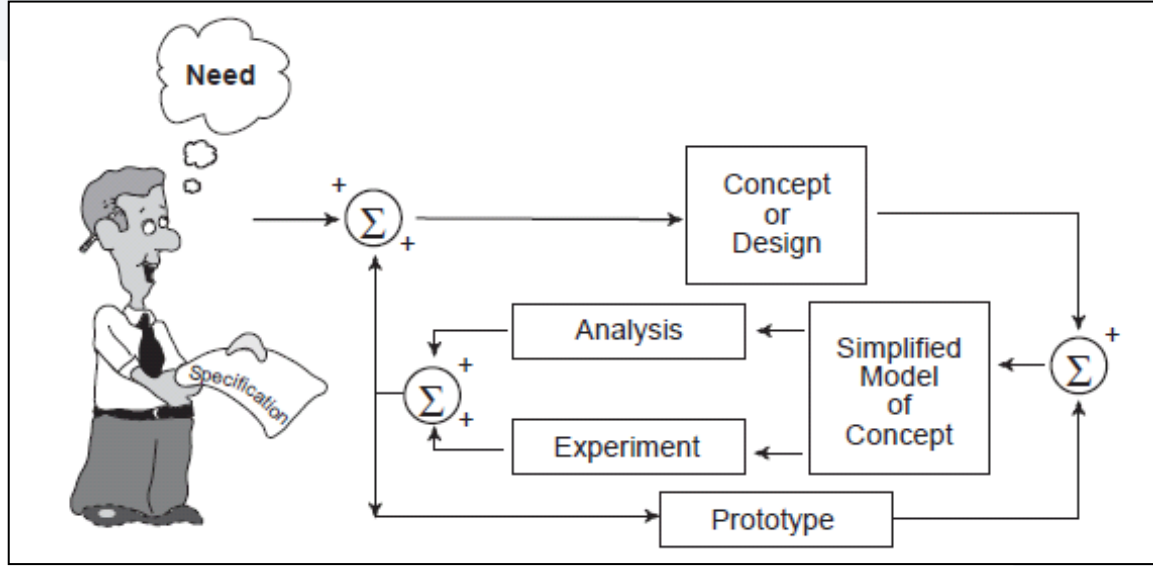
حل المشاكل بالتحليل العددي ليس خاليا من الصعوبات أو العيوب نتيجة أخطاء حتمية تصاحب استخدام الحاسب و التي تبدو لنا بسيطة ولكنها في ظروف معينة قد تؤدي إلى كوارث.



صاروخ باترويت الذي سقط في موقعه
نتيجة خطأ التقريب الحسابي

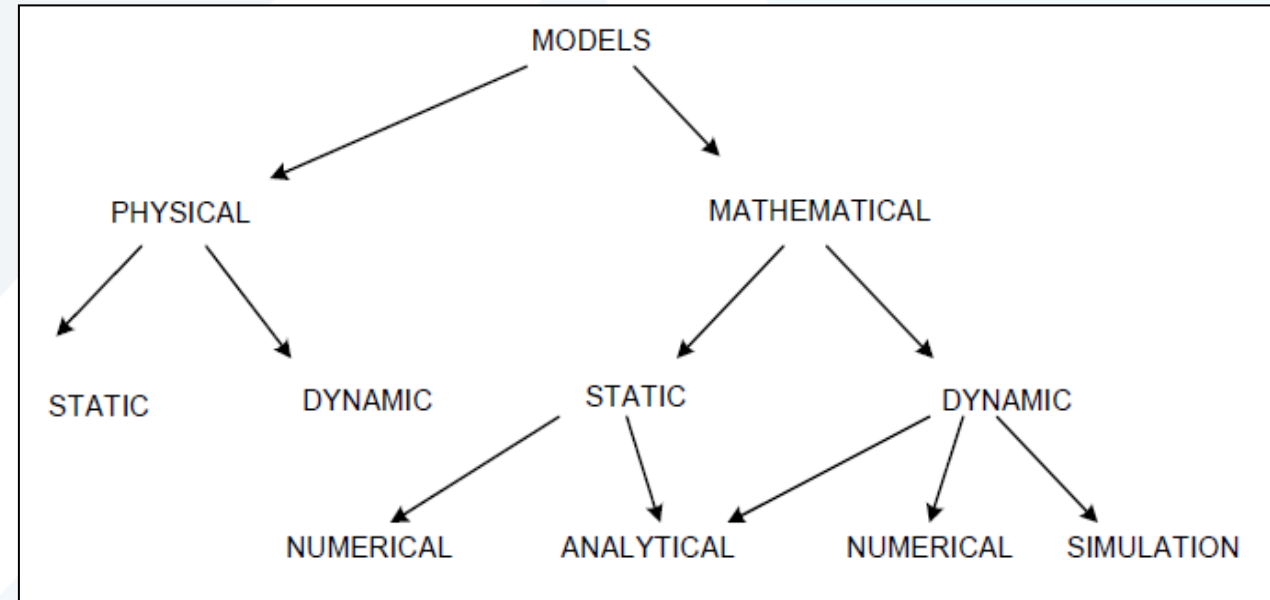


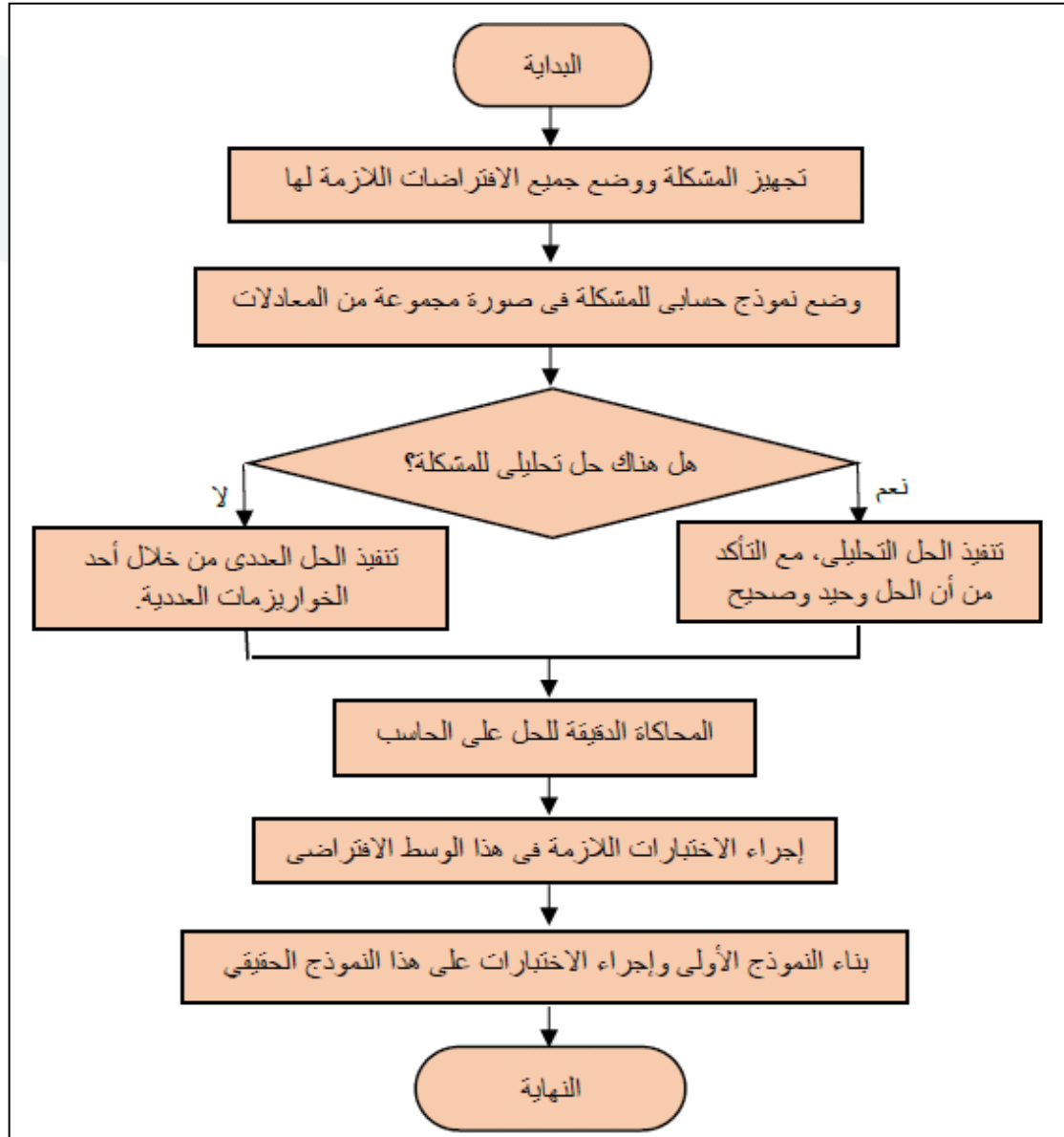
سقوط الصاروخ أريان 5 بعد
إطلاقه مباشرة نتيجة أخطاء في التقريب الحسابي



من حاجة إلى حل

النماذج وحلولها



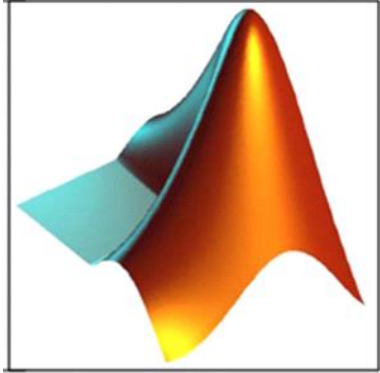


خوارزمية حل المشكلة

تعريف برنامج Matlab-Simulink

Matlab

لغة ذات مستوى عالي للحسابات و البرمجة و هو اختصار لعبارة مختبر المصفوفة **MATrix LABoratory** لأنه يتعامل مع البيانات كمصفوفات وهي نقطة القوة الأساسية الكبيرة فيه مما يجعله الأداة البرمجية الأكثر كفاءة ديناميكياً (إعطاء أبعاد متعددة للظاهرة المدروسة)



يستطيع Matlab

- ❖ إجراء الحسابات الرياضية بما فيها الأكثر تعقيداً (الرياضيات التفاضلية والمتقطعة واللابلاسية وغيرها من التقنيات المتقدمة)
- ❖ تطوير الخوارزميات المبرمجة على اختلاف أنواعها (المتسلسلة و المتفرعة)
- ❖ معالجة البيانات و تحليلها و عرضها بمختلف الطرق
- ❖ تنفيذ عمليات الرسم ثنائي و ثلاثي الأبعاد بدقة متناهية

✓ يشمل Matlab على مجموعة من الأدوات البرمجية مصنفة ضمن ما يعرف toolbox (صندوق أدوات) حيث أن كل صندوق متخصص بمجال معين



جامعة
المنارة

Shortcuts | How to Add | What's New

1 Command Window نافذة الأوامر

New to MATLAB? Watch this video or read [Getting Started](#).

$\text{fx} >> |$

2 Workspace إطار العمل

Stack: Base Select data to plot

Name	Value	Min	Max
------	-------	-----	-----

التعريف بالبرنامج

برنامج هندسي مخصص للمهام الحسابية و محاكاة
الأنظمة المختلفة ، حيث تتوفر فيه العديد من الدوال
المبنيّة داخليا والتي تستخدم في حل المعادلات
الرياضية و التفاضل والتكامل والرسم ثنائي الأبعاد
والرسم ثلاثي الأبعاد وغيرها الكثير والكثير.

الاجزاء الرئيسية للبرنامج

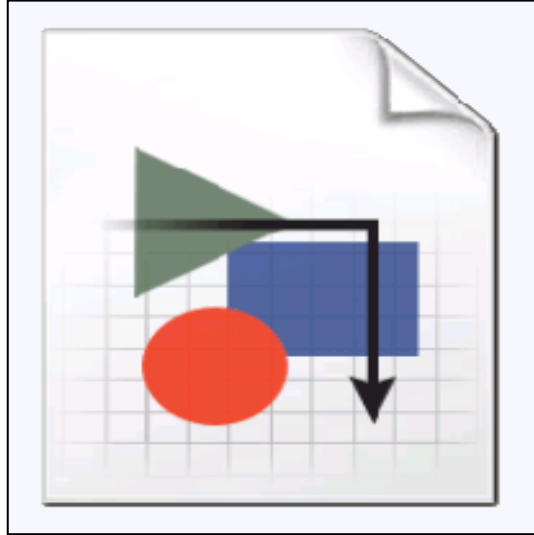
1- Command Window.
2- Work Space.
3- Command History

3 Command History تاريخ الأوامر

-- p 05:49 20/02/2013 --

Start OVR

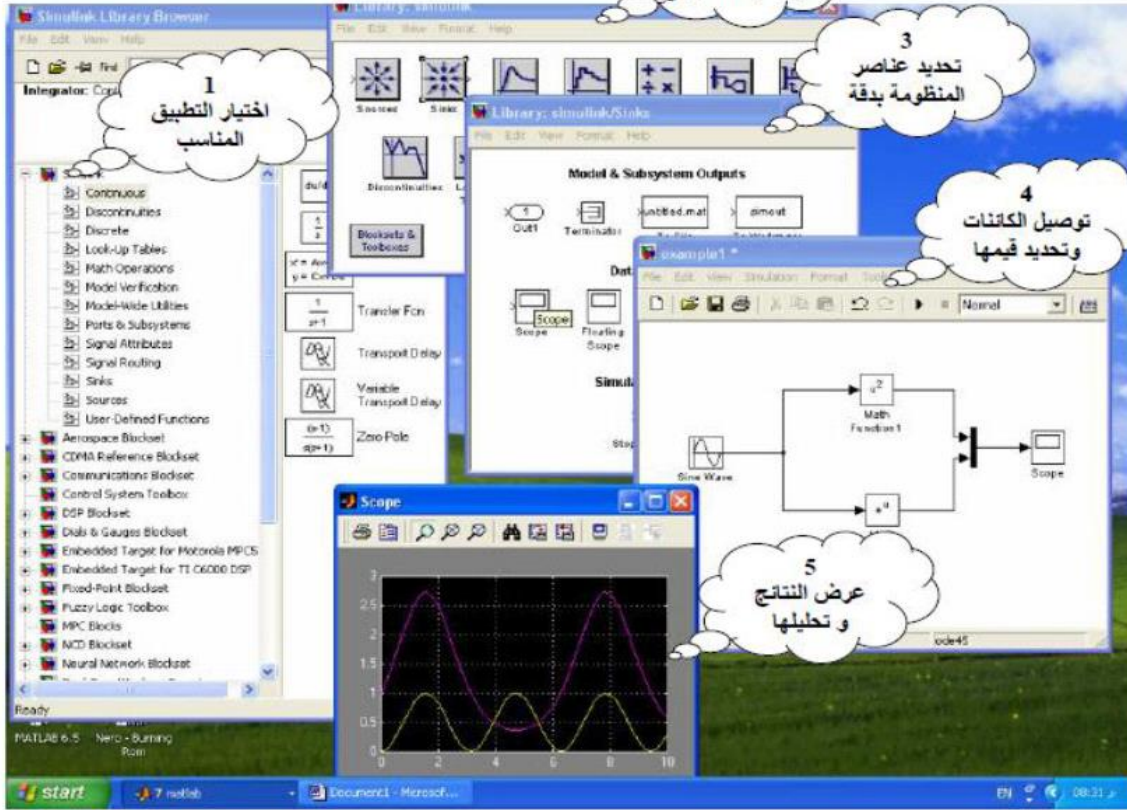
جزء من Matlab و هو أداة نمذجة و محاكاة و تحليل النظم الديناميكية
يستطيع التعامل مع النظم المستمرة و المتقطعة و الهجينة و هو اختصار لعبارة (SIMulation and LINK) أي
بمعنى محاكاة و ارتباط



✓ يستخدم لبناء النماذج الهندسية حيث يقوم بإخراج واجهات رسومية (GUI) كمخططات صندوقية و بعد ذلك
يمكن تنفيذ المحاكاة و تحليل النتائج

✓ Simulink بمثابة مكتبة ضخمة جداً مؤلفة من مكتبات فرعية كل مكتبة فرعية تتضمن أدوات نمذجة و محاكاة
و تحليل مجال تخصصي معين (هندسة الطيران-السيارات-نظم التحكم الآلي-النظم الالكترونية- النظم
الهيدروليكية- النظم الحرارية-النظم الميكانيكية-معالجة الصورة-معالجة الإشارة-المنطق الضبابي-الشبكات
العصبونية الصناعية و عدد كبير من المجالات التخصصية الأخرى بما فيها المجالات الطبية و الاقتصادية و حتى
البيولوجية)

✓ يركز في معالجته لمختلف هذه المجالات على رياضيات عالية التقنية ركيزتها الأساسية المصفوفات و الطرق
العددية المبرمجة المتقدمة



1 اختيار التطبيق المناسب

2 اختيار المكونات الرئيسية للمشروع

3 تحديد عناصر المنظومة بدقة

4 توصيل الكائنات وتحديد قيمها

5 عرض النتائج وتحليلها

Simulink Library Browser
 Integrator: Control
 Continuous
 Discontinuities
 Discrete
 Look-Up Tables
 Math Operations
 Model Verification
 Model-Wide Utilities
 Ports & Subsystems
 Signal Attributes
 Signal Routing
 Sinks
 Sources
 User-Defined Functions
 Aerospace Blockset
 CDMA Reference Blockset
 Communications Blockset
 Control Systems Toolbox
 DSP Blockset
 Diagnostics & Gauges Blockset
 Embedded Target for Motorola MPC5
 Embedded Target for TI C6000 DSP
 Fixed-Point Blockset
 Fuzzy Logic Toolbox
 MPC Blocks
 MCD Blockset
 Neural Network Blockset

Model & Subsystem Outputs

Example1

Scope

Ready
MATLAB 6.5
New - Running
Run

start

Document1 - Microsoft...

09:31

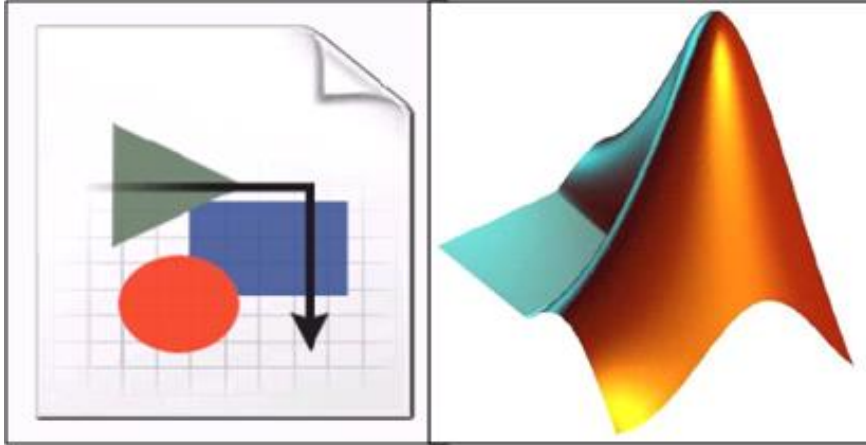
كيفية اختيار العناصر لبناء برنامج محاكاة

في المجال الأكاديمي:

عمليات التفاضل و التكامل و الطرق العددية المعقدة
حل المعادلات الجبرية
حل المعادلات التفاضلية و اللاابلاسية ذات الرتب العليا
عمليات التفاضل الجزئي و عمليات الكسر الجزئي
العناصر المنتهية

في المجال التطبيقي:

أنظمة التحكم
معالجة الصورة و الصوت
محاكاة الالكترونيات
محاكاة النظم الميكانيكية و الهيدروليكية و الحرارية و الكهربائية
صناعة السيارات
الطيران و الصناعات العسكرية (الدفاع الجوي)
صناعة الروبوت
في المجالات الانشائية (التحليل بالعناصر المنتهية)
الهندسة الطبية (التحليل الدوائي و الكشف عن الأورام الخبيثة)





Linear Equations

الكثير من النظم الحقيقية يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية في عدد من المجاهيل وعندما يكون عدد هذه المعادلات صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات. أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى المئات أو الآلاف فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق الرقمية لحل هذا النظام من المعادلات كما ذكرنا أن كل المعادلات في النظام لابد أن تكون خطية، وأن عدد المجاهيل يساوى عدد المعادلات. توجد نظم المعادلات الخطية في الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، و الجوائز المرنة، والتدفق الحراري، والمجالات الكهرومغناطيسية والدارات الكهربائية وغيرها الكثير.

يمكن كتابة مثل هذا النظام من المعادلات الخطية كما يلي:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

وهذا النظام يمكن كتابته في صورة مصفوفات كما يلي:

$$Ax=b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{حيث:}$$

والمطلوب هو حساب قيمة المتجه x الذي يحقق كل المعادلات السابقة حيث x في كل التطبيقات تمثل استجابة أو خرج النظام و b هي الدخل للنظام و A تمثل معاملات أو خواص النظام.

طريقة معكوس مصفوفة

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

Example

$$\begin{array}{rrcr} 3x & +2y & -z & = 10 \\ -x & +3y & +2z & = 5 \\ x & -y & -z & = -1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A=[3 \ 2 \ -1; -1 \ 3 \ 2; 1 \ -1 \ -1];$$

$$b=[10 \ 5 \ -1]';$$

$$x=\text{inv}(A)*b$$

$$x =$$

$$-2.0000$$

$$5.0000$$

$$-6.0000$$

طريقة Cramer

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = A$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = B$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} & a_{13} \\ B & a_{22} & a_{23} \\ C & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A & a_{13} \\ a_{21} & B & a_{23} \\ a_{31} & C & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ a_{31} & a_{32} & C \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_1}{\Delta} \quad y = \frac{D_2}{\Delta} \quad z = \frac{D_3}{\Delta}$$

Example

$$\begin{array}{rrcr} 3*x & +2*y & +5*z & = & 22 \\ 4*x & +5*y & -2*z & = & 8 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{array}$$

```
A=[3 2 5;4 5 -2; 1 1 1];  
delta=det(A);  
d1=[22 2 5;8 5 -2; 6 1 1];  
D1=det(d1);  
d2=[3 22 5;4 8 -2; 1 6 1];  
D2=det(d2);  
d3=[3 2 22;4 5 8; 1 1 6];  
D3=det(d3);  
x=D1/delta;  
y=D2/delta;  
z=D3/delta;  
disp('x=');disp(x);  
disp('y=');disp(y);  
disp('z=');disp(z);
```

```
clc  
clear  
a=input('Overall Matrix=');  
b=a(:,end);  
a(:,end)=[];  
delta=det(a);  
for i=1:size(a,1)  
    N=a;  
    N(:,i)=b;  
    D=det(N);  
    x=D/delta;  
    disp(['variable',num2str(i),'=']);  
    disp(x)  
end
```

Nonlinear Equations

$$T = e^{-kt} + 100$$

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8$$

$$x(t) = Ae^{-t} \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0) + 0.2 + 0.7 \sin 7t$$

إن حل المعادلات اللاخطية أداة أساسية عند نمذجة و محاكاة الأنظمة الفيزيائية

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر

الحل بطريقة بيانية

إذا رسمنا مخطط الدالة $y=f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة

$$f_1(x) = f_2(x)$$

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

حيث f_1, f_2 دالتان يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذراً للمعادلة.

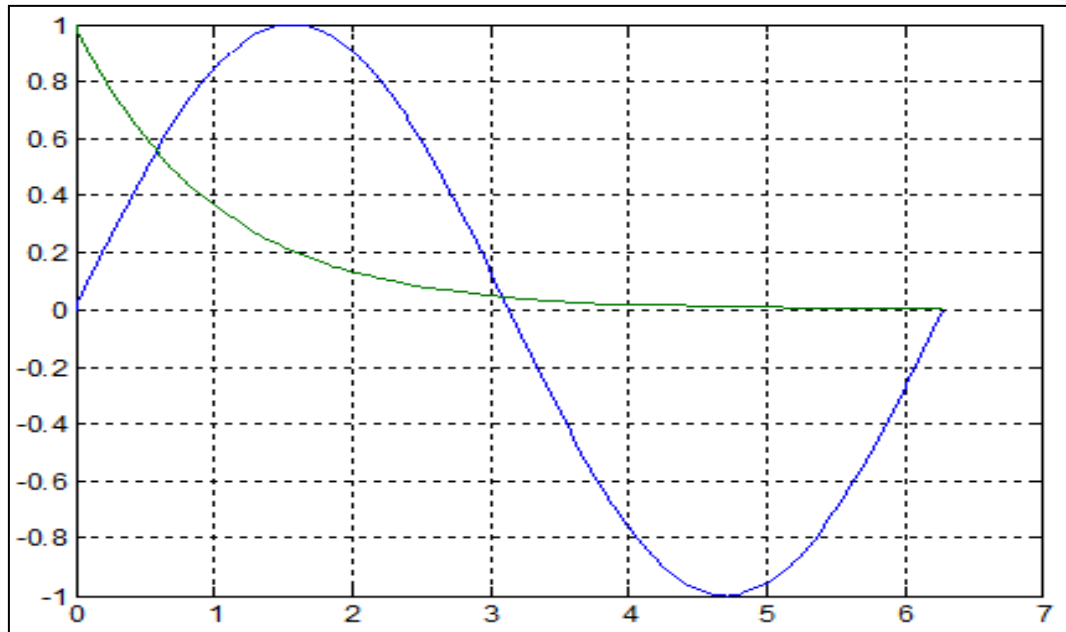
Example

$$e^x \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = e^{-x}$$

عين مواقع جذور المعادلة

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة:



```
x=0:pi/100:2*pi;
```

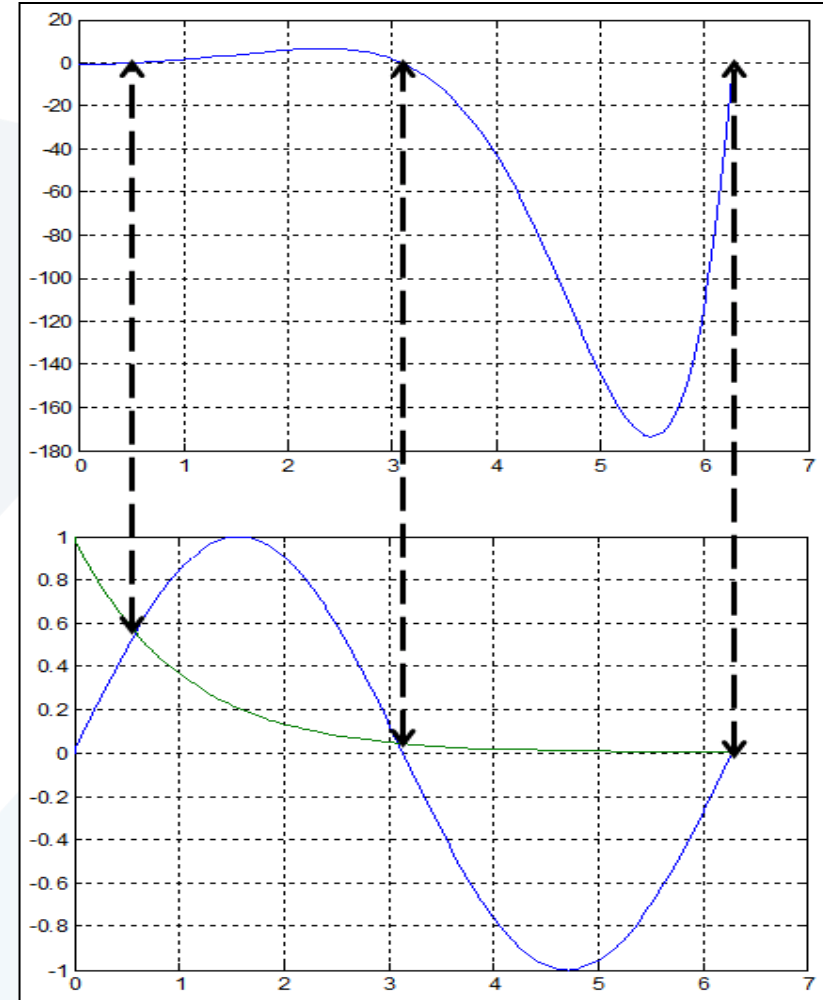
```
y=sin(x);
```

```
z=exp(-x);
```

```
plot(x, y, x, z)
```

```
grid
```

```
x=0:pi/100:2*pi;  
y=sin(x);  
z=exp(-x);  
w=exp(x).*sin(x)-1;  
subplot(211);  
plot(x,w);  
title('exp(x).*sin(x)-1');  
xlabel('x-axis');  
ylabel('w-axis');  
grid  
subplot(212);  
plot(x,y,x,z);  
title('y=sin(x)&z=exp(-x)');  
xlabel('x-axis');  
ylabel(' y&z-axis');  
grid
```



تعيين مواقع الجذور بطريقة مبرمجة

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإذا كانت قيمة $f(x_i) \cdot f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين x_i و x_{i+1} .

مثال: عين مواقع جذور المعادلة: $f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$ في الفترة $[-8, 8]$.

إذا أخذنا فترة تقسيم h مساوية إلى 4 فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط الأول في الفترة $(-4, 0)$ والثاني في الفترة $(4, 8)$.

أما عند اختيار فترة تقسيم أصغر 2 بدلاً من 4 فإن إشارات الدالة تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي إن هناك جذوراً في الفترات $(-2, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, 4)$ و $(4, 6)$.


```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:4:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

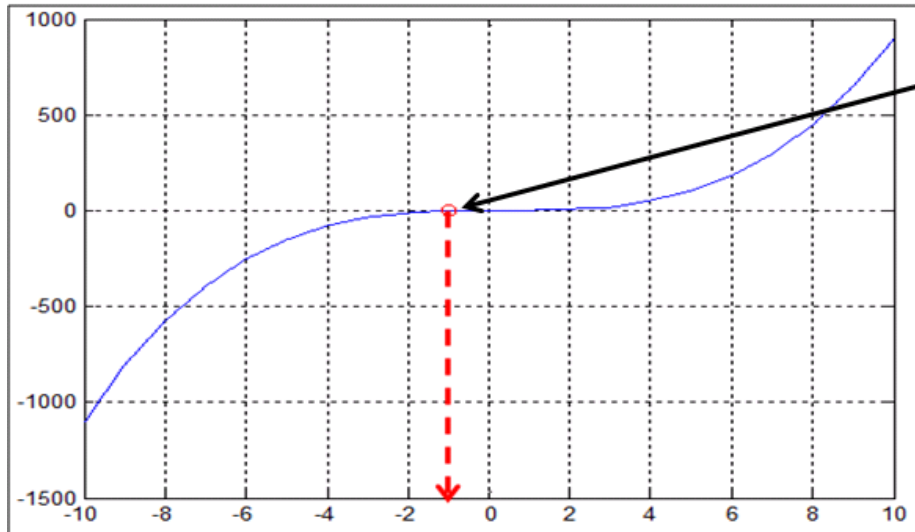
```
-8
a =
    7654
-4
a =
    638
0
a =
   -10
4
a =
   -50
8
a =
    902
```

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:2:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

```
-8
a =
    7654
-6
a =
   2750
-4
a =
    638
-2
a =
    22
0
a =
   -10
2
a =
    14
4
a =
   -50
6
a =
    38
8
a =
    902
```

Example

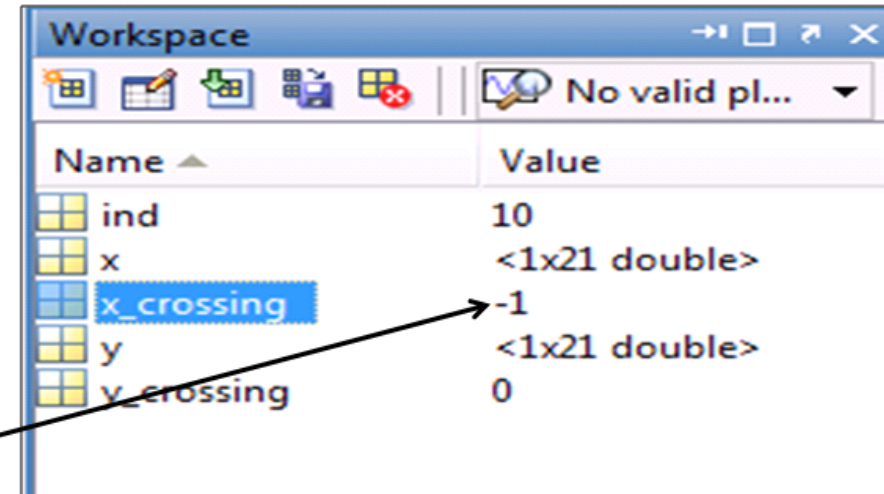
```
x=-10:1:10;
y=x.^3-x.^2+2;
ind=find(y==0);
x_crossing=x(ind);
y_crossing=y(ind);
plot(x, y,x_crossing,y_crossing,'ro ');
grid
```



تقنيات باستخدام Matlab

$$y=x^3-x^2+2$$

عين مواقع جذور المعادلة



باستخدام تعليمة حل المعادلة في الماتلاب

```
[x]=solve('x^3-x^2+2')
```

باستخدام تعليمة رسم التوابع في الماتلاب

```
ezplot('x^3-x^2+2',[-10 10])
grid
```

Example

$$x - 2y + z^2 = 6$$

$$3x + y^3 - z = 8$$

$$x + y + z = 6$$

`syms X Y Z`

`[X Y Z]=solve('X-2*Y+Z^2-6','3*X+Y^3-Z-8','X+Y+Z-6');`

`double([X Y Z])`

ans =

1.0000	2.0000	3.0000
3.2263	0.7207	2.0531
7.7556 - 3.4284i	-2.6088 + 0.6533i	0.8531 + 2.7751i
7.7556 + 3.4284i	-2.6088 - 0.6533i	0.8531 - 2.7751i
6.6313 - 0.7573i	1.2484 + 2.0487i	-1.8797 - 1.2914i
6.6313 + 0.7573i	1.2484 - 2.0487i	-1.8797 + 1.2914i

انتهت المحاضرة