العبارة المنطقية : كل عبارة منطقية تتألف من جمل منطقية بسيطة تسمى متغيرات منطقية يربط بينها روابط منطقية وأقواس .

مثال : $((p)\oplus(p)) \vee (\neg(q) \rightarrow (r))$

$((p) \leftrightarrow (q)) \vee ((p) \wedge (r))$

إن هذه الكتابة في أحيان كثيرة مرهقة بالنسبة للطالب وربما تسبب له أخطاء بسبب كثرة الأقواس ويمكننا الاستغناء عن بعض الأقواس ولكن ضمن قواعد نحددها :

1) يمكن أن لا نضع الأقواس حول المتغير المنطقي .

2) الرابطة الأحادية $\neg$ لا تؤثر إلا على المتغير المنطقي الذي يليها مباشرة وليس لها تأثير على الروابط الأخرى .

مثال : العبارة المنطقية $(\neg(p)) \vee (q)$ يمكن التعبير عنها بالشكل $\neg p \vee q$.

3) الرابطتان المنطقيتان $\wedge$, $\vee$ تتساويان بالتأثير مع بعضهما ولكن لا يؤثران على الرابطتين $\rightarrow , \leftrightarrow$

مثال : العبارة المنطقية $(\neg(p)) \vee (q)) \rightarrow (r)$ يمكن التعبير عنها بالشكل $\neg p \vee q \rightarrow r$

ملاحظة : بما أن الرابطتين $\wedge$, $\vee$ متساويتا التأثير فإنه لابد من الحفاظ على الأقواس بين هذه الروابط .

مثال : العبارة المنطقية $(p \vee q) \wedge r$ تختلف عن العبارة المنطقية $p \vee (q \wedge r)$

ملاحظة : إن العبارة $p \vee q \wedge r$ ليست عبارة منطقية لأننا لا نستطيع الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة إلا بعد تحديد مكان الأقواس .

4) الرابطتان المنطقيتان $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ تتساويان بالتأثير مع بعضهما ولكنهما يؤثران على الروابط السابقة .

ملاحظة : بما أن الرابطتين $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ متساويتا التأثير فإنه لابد من الحفاظ على الأقواس بين هذه الروابط .

مثال : العبارة المنطقية $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ تختلف عن العبارة المنطقية $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1

0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1

ونلاحظ أن قيم العبارة المنطقية $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ تختلف عن قيم العبارة المنطقية $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

تكافؤ عبارتين منطقيتين

تعريف : نقول عن عبارتين منطقيتين A و B إنهما متكافئتان إذا وفقط إذا كان لهما نفس قيم الصواب من أجل جميع قيم الصواب للمتغيرات المنطقية في العبارتين المنطقيتين A و B ، ونكتب $A \equiv B$.

مثال : ليكن لدينا العبارتين المنطقيتين $A \equiv p \rightarrow q$ و $B \equiv \neg p \vee q$. لنوجد جدول الحقيقة للعبارتين المنطقيتين A و B :

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

وكما هو واضح في جدول الحقيقة فإن قيم الحقيقة متطابقة في العمودين الثالث والأخير واللذان يمثلان العبارتين المنطقيتين A و B وبالتالي فإن $A \equiv B$.

مثال : برهن أن $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q)) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

مثال : برهن أن $p \oplus q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \oplus q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

الاستدلال Tautologie

تعريف : نقول عن عبارة منطقية A إنها استدلال (أو عبارة منطقية صائبة منطقياً) إذا كانت صائبة من أجل جميع قيم الحقيقة للمتغيرات في العبارة المنطقية A ، ونكتب $A \equiv t$.

مثال : إن أفضل مثال عن عبارة منطقية هي استدلال المبدأ الثاني وهو الثالث المستبعد $A \equiv p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

إذن $p \vee \neg p \equiv t$

مثال : برهن أن العبارة المنطقية $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ هي استدلال

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

ومن جدول الحقيقة يظهر لنا أن $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \equiv t$.

التناقض Contraduction

تعريف : : نقول عن عبارة منطقية A إنها تناقض (أو عبارة منطقية خاطئة منطقياً) إذا كانت خاطئة من أجل جميع قيم الحقيقة للمتغيرات في العبارة المنطقية A ، ونكتب $A \equiv c$.

مثال : إن أفضل مثال عن عبارة منطقية هي تناقض المبدأ الثالث وهو عدم التناقض . $A \equiv p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

إذن $p \wedge \neg p \equiv c$

بنية العبارات المنطقية

نرمز لأسرة العبارات المنطقية بالرمز L ونرمز لبنية العبارات المنطقية بالرمز

$L = (L, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, c, t)$ أو بصورة مختصرة $L = (L, \vee, \wedge, \neg, c, t)$ وسنرى سبب ذلك عند دراستنا لجبر بول وأن الروابط المنطقية الأساس هي $\neg, \wedge, \vee$.

خواص بنية العبارات المنطقية $L = (L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$

خاصة 1 : $\forall p \in L$ $\neg(\neg p) \equiv p$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

خاصة 2 : $\neg c \equiv t$ و $\neg t \equiv c$

وهذا واضح

خاصة 3 (خاصية اللانمو) : $\forall p \in L$ $p \vee p \equiv p$ و $p \wedge p \equiv p$

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

خاصة 4 (خاصية الإبدالية) : $p \wedge q \equiv q \wedge p$ و $p \vee q \equiv q \vee p$

واضح

خاصة 5 (خاصية التجميعية) : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

واضح من جدول الحقيقة أن $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ويمكن البرهان على أن $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ بنفس الطريقة .

خاصية 6 (خاصية التوزيعية) : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0

0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

واضح من جدول الحقيقة أن $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

وبنفس الطريقة نبرهن أن $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

خاصة 7 (خاصية العنصر المحايد) : $\forall p \in L$ $\quad p \vee c \equiv p$ و $p \wedge t \equiv p$

p	c	t	$p \vee c$	$p \wedge t$
1	0	1	1	1
0	0	1	0	0

خاصية 8 (خاصية العنصر الماص) : $\forall p \in L$ $\quad p \vee t \equiv t$ و $p \wedge c \equiv c$

p	c	t	$p \vee t$	$p \wedge c$
1	0	1	1	0
0	0	1	1	0

خاصية 9 (خاصية المتمم) : $\forall p \in L$ $\quad p \vee \neg p \equiv t$ و $p \wedge \neg p \equiv c$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

خاصية 10 (قانونا دومورغان) :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

من خلال جدول الحقيقة نجد :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

خاصية 11 (قانونا الامتصاص) :

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

ملاحظة : يمكن البرهان على الخاصية 11 بالاعتماد على الخواص السابقة :

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee c) \wedge (p \vee q)$ خاصية 7

$\equiv p \vee (c \wedge q)$ خاصية 6

$\equiv p \vee c$ خاصية 8

$\equiv p$ خاصية 7

وأيضاً :

خاصية 7	$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$
خاصية 6	$\equiv p \wedge (t \vee q)$
خاصية 8	$\equiv p \wedge t$
خاصية 7	$\equiv p$

تمرين : لنوجد صيغة مكافئة للعبارة المنطقية $A \leftrightarrow B$ اعتماداً على الخواص السابقة

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \\ &\equiv ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee ((\neg A \vee B) \wedge A) \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A) \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee c \vee (A \wedge B) \vee c \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \end{aligned}$$

تمرين : لنوجد صيغة مكافئة للعبارة المنطقية $A \oplus B$ اعتماداً على الخواص السابقة

$$\begin{aligned} A \oplus B &\equiv \neg(A \leftrightarrow B) \\ &\equiv \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \\ &\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

–