خاصية 11 (قانونا الامتصاص) : $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

ملاحظة : يمكن البرهان على الخاصية 11 بالاعتماد على الخواص السابقة :

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee c) \wedge (p \vee q)$ خاصية 7

$\equiv p \vee (c \wedge q)$ خاصية 6

$\equiv p \vee c$ خاصية 8

$\equiv p$ خاصية 7

وأيضاً :

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$ خاصية 7

$\equiv p \wedge (t \vee q)$ خاصية 6

$\equiv p \wedge t$ خاصية 8

$\equiv p$ خاصية 7

تمرين : لنوجد صيغة مكافئة للعبارة المنطقية $A \leftrightarrow B$ اعتماداً على الخواص السابقة

$$\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \\
&\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \\
&\equiv ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee ((\neg A \vee B) \wedge A) \\
&\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A) \\
&\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee c \vee (A \wedge B) \vee c \\
&\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)
\end{aligned}$$

تمرين : لنوجد صيغة مكافئة للعبارة المنطقية $A \oplus B$ اعتماداً على الخواص السابقة

$$\begin{aligned} A \oplus B &\equiv \neg(A \leftrightarrow B) \\ &\equiv \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \\ &\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

مبدأ الثنوية :

تعريف: لتكن A عبارة منطقية , نعرف ثنوية العبارة المنطقية A بأنها العبارة المنطقية الناتجة من العبارة المنطقية A باستبدال كل $\vee$ بـ $\wedge$ وكل $\wedge$ بـ $\vee$ واستبدال كل t بـ c وكل c بـ t . نرمز لثنوية العبارة المنطقية A بالرمز A^* .

مثال : ثنوية العبارة المنطقية $A \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$ هي العبارة المنطقية

$$A^* \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$$

مثال : ثنوية العبارة المنطقية $p \wedge \neg p \equiv c$ هي العبارة المنطقية $p \vee \neg p \equiv t$

مبدأ الثنوية : كما هو واضح من خواص بنية العبارات المنطقية في كل خاصة من خواصها لدينا عبارة منطقية وثنويتها وينص مبدأ الثنوية على أن كل خاصة صحيحة من أجل كل المتغيرات المنطقية فيها فإن ثنويتها أيضاً صحيحة .

مثال : برهن صحة الخاصة الآتية : من أجل كل p , q , r من L فإن

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

الحل :

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) &\equiv \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee r \vee q) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge ((q \vee r) \vee (p \wedge \neg p)) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge ((q \vee r) \vee c) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r) \end{aligned}$$

تسمى هذه الخاصة بخاصية الإضافة

ملاحظة : من مبدأ الثنوية فإن ثنوية هذه العبارة هي أيضاً صحيحة ولدينا :

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

علاقة الاقتضاء Implication

تعريف : ليكن لدينا العبارتين المنطقيتين A و B . نقول إن العبارة المنطقية A تقتضي العبارة المنطقية B ونكتب $A \Longrightarrow B$ إذا وفقط إذا كانت العبارة المنطقية $A \rightarrow B$ استدلالاً , أي أن $A \rightarrow B \equiv t$.

ملاحظة : قد تجدون في بعض الكتب رمز الرابطة المنطقية $\rightarrow$ يعبرون عنه بنفس الرمز $\Longrightarrow$ وهذا قد يؤدي إلى التباس بين مفهومي الرابطة المنطقية وعلاقة الاقتضاء فالعبارة $A \rightarrow B$ هي عبارة منطقية تحتمل الخطأ والصواب بينما العبارة $A \Longrightarrow B$ هي علاقة بين عبارتين منطقيتين وليست عبارة منطقية .

سندرس جملة من الاقتضاءات المهمة

1) $\forall A \in L \quad A \Longrightarrow A$

$$A \rightarrow A \equiv \neg A \vee A \equiv t$$

2) $\forall A, B \in L \quad A \Longrightarrow A \vee B$ و $B \Longrightarrow A \vee B$

$$A \rightarrow A \vee B \equiv \neg A \vee (A \vee B) \equiv (\neg A \vee A) \vee B \equiv t \vee B \equiv t$$

3) $\forall A, B \in L \quad A \wedge B \Longrightarrow A$ و $A \wedge B \Longrightarrow B$

$$A \wedge B \rightarrow A \equiv \neg(A \wedge B) \vee A \equiv \neg A \vee \neg B \vee A$$
$$\equiv (\neg A \vee A) \vee \neg B \equiv t \vee \neg B \equiv t$$

4) $(A \vee B) \wedge \neg A \Longrightarrow B$ و $(A \vee B) \wedge \neg B \Longrightarrow A$

$$(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B \equiv \neg((A \vee B) \wedge \neg A) \vee B \equiv \neg(A \vee B) \vee$$
$$\neg(\neg A) \vee B \equiv \neg(A \vee B) \vee (A \vee B) \equiv t$$

5) $(A \rightarrow B) \wedge A \Longrightarrow B$

$$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge A \rightarrow B$$
$$\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge A)) \vee B$$
$$\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee B$$
$$\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B) \equiv t$$

$$(A \to B) \land \neg B \Longrightarrow \neg A \quad (6$$

$$\begin{aligned}(A \to B) \land \neg B \to \neg A &\equiv (\neg A \lor B) \land \neg B \to \neg A\\ &\equiv \neg((\neg A \lor B) \land \neg B)) \lor \neg A\\ &\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B) \lor \neg A\\ &\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor B \lor \neg A\\ &\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor (\neg A \lor B) \equiv t\end{aligned}$$

$$B \Longrightarrow A \to B \quad (7$$

$$\begin{aligned}B \to (A \to B) &\equiv \neg B \lor (\neg A \lor B)\\ &\equiv (\neg B \lor B) \lor \neg A\\ &\equiv t \lor \neg A \equiv t\end{aligned}$$

$$\neg A \Longrightarrow A \to B \quad (8$$

$$\begin{aligned}\neg A \to (A \to B) &\equiv \neg(\neg A) \lor (\neg A \lor B)\\ &\equiv A \lor (\neg A \lor B)\\ &\equiv (A \lor \neg A) \lor B \equiv t \lor B \equiv t\end{aligned}$$

$$(A \to B) \land (B \to D) \Longrightarrow A \to D \quad (9$$

$$\begin{aligned}&(A \to B) \land (B \to D) \to (A \to D) \equiv\\ &\equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor D) \to (\neg A \lor D)\\ &\equiv \neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor D)) \lor (\neg A \lor D)\\ &\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor D) \lor (\neg A \lor D)\\ &\equiv (A \land \neg B) \lor (B \land \neg D) \lor (\neg A \lor D)\\ &\equiv ((A \land \neg B) \lor \neg A) \lor ((B \land \neg D) \lor D)\\ &\equiv ((A \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D) \land (\neg D \lor D))\\ &\equiv (t \land (\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D) \land t)\\ &\equiv ((\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D))\\ &\equiv (\neg B \lor B) \lor (\neg A \lor D)\\ &\equiv t \lor (\neg A \lor D) \equiv t\end{aligned}$$

$$(A\oplus B) \wedge B \Longrightarrow \neg A \quad و \quad (A\oplus B) \wedge A \Longrightarrow \neg B \qquad (10$$

$$\begin{aligned}
(A\oplus B) \wedge A \to \neg B &\equiv ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge A \to \neg B \\
&\equiv A \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv c \vee (A \wedge \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv (A \wedge \neg B) \to \neg B \\
&\equiv \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \\
&\equiv \neg A \vee B \vee \neg B \\
&\equiv \neg A \vee t \equiv t
\end{aligned}$$

$$(A\oplus B) \wedge \neg B \Longrightarrow A \quad و \quad (A\oplus B) \wedge \neg A \Longrightarrow B \qquad (11$$

$$\begin{aligned}
(A\oplus B) \wedge \neg A \to B &\equiv ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge \neg A \to B \\
&\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to B \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \neg A \to B \\
&\equiv (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \to B \\
&\equiv c \vee (B \wedge \neg A)) \to B \\
&\equiv (B \wedge \neg A) \to B \\
&\equiv \neg(B \wedge \neg A) \vee B \\
&\equiv \neg B \vee A \vee B \\
&\equiv (\neg B \vee B) \vee A \\
&\equiv t \vee A \equiv t
\end{aligned}$$

المحاكمات المنطقية

تعريف : نسمي العبارة $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Longrightarrow B$ محاكمة منطقية حيث تسمى العبارات المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مقدمات وتسمى العبارة المنطقية B نتيجة .

نرمز للمحاكمة المنطقية بالشكل

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore \quad B \end{array}$$

بالشكل أو

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{\therefore \quad B}$$

ملاحظة : إذا كانت إحدى العبارات المنطقية A_i خاطئة فإن العبارة المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكون خاطئة وبالتالي فإن العبارة المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B$ صائبة دائماً والمحاكمة المنطقية $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Longrightarrow B$ صحيحة دون معرفة صحة أو خطأ العبارة المنطقية B ولذلك عند دراسة المحاكمة المنطقية نفرض دائماً أن المقدمة $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ صحيحة وهذا يقتضي أن تكون جميع العبارات المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ صائبة .

ولدينا القواعد الآتية عند دراسة المحاكمة المنطقية :

1) إذا حصلنا خلال دراستنا للمحاكمة المنطقية $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{\therefore \quad B}$ على تناقض من الشكل $A \wedge \neg A$ فإن المحكمة المنطقية تكون خاطئة .
2) عند دراستنا للمحاكمة المنطقية قد لا نستخدم بعض المقدمات .
3) عند دراستنا للمحاكمة المنطقية قد نستخدم بعض المقدمات أكثر من مرة .

قواعد المحاكمات

قواعد المحاكمات تأتي من تطبيق الاقتضاءات التي درسناها :

1) $$\frac{A}{\therefore \quad A}$$

2) $$\frac{A}{\therefore \quad A \vee B}$$ و $$\frac{B}{\therefore \quad A \vee B}$$

3) $\dfrac{A \land B}{\therefore \quad A}$ و $\dfrac{A \land B}{\therefore \quad B}$

4) $\dfrac{A \lor B \,,\ \neg A}{\therefore \quad B}$ و $\dfrac{A \lor B \,,\ \neg B}{\therefore \quad A}$

5) $\dfrac{A \,,\ A \rightarrow B}{\therefore \quad B}$

6) $\dfrac{A \rightarrow B \,, \neg B}{\therefore \quad \neg A}$

7) $\dfrac{B}{\therefore \quad A \rightarrow B}$

8) $\dfrac{\neg A}{\therefore \quad A \rightarrow B}$

9) $\dfrac{A \rightarrow B \,,\ B \rightarrow D}{\therefore \quad A \rightarrow D}$

10) $\dfrac{A \oplus B \,,\ A}{\therefore \quad \neg B}$ و $\dfrac{A \oplus B \,,\ B}{\therefore \quad \neg A}$

11) $\dfrac{A \oplus B \,, \neg A}{\therefore \quad B}$ و $\dfrac{A \oplus B \,,\ \neg A}{\therefore \quad B}$

يمكن إضافة بعض قواعد الاستنتاج غير الأساسية

12) $\dfrac{A \lor B \rightarrow D}{\therefore \quad A \rightarrow D}$ و $\dfrac{A \lor B \rightarrow D}{\therefore \quad B \rightarrow D}$

لنبرهن مثلاً أن $A \vee B \to D \Longrightarrow A \to D$:

$$\begin{aligned}
(A \vee B \to D) \to (A \to D) &\equiv \neg(A \vee B) \vee D \to (\neg A \vee D) \\
&\equiv \neg(\neg(A \vee B) \vee D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee D) \vee (\neg A \vee D) \vee (B \wedge \neg D) \\
&\equiv t \vee (B \wedge \neg D) \ \equiv t
\end{aligned}$$

13) $\dfrac{A \to B \wedge D}{\therefore \quad A \to B}$ و $\dfrac{A \to B \wedge D}{\therefore \quad A \to D}$

لنبرهن مثلاً أن $A \to B \wedge D \Longrightarrow A \to B$

$$\begin{aligned}
(A \to B \wedge D) \to (A \to B) &\equiv \neg(A \to B \wedge D) \vee (A \to B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee (B \wedge D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee B)) \vee (\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee D) \\
&\equiv t \vee \neg(\neg A \vee D) \equiv t
\end{aligned}$$

مثال : اختبر صحة المحاكمة الآتية

$$\frac{p\wedge\neg q \to r \ , r\to d \ , \neg(q\vee d)}{\therefore \quad \neg p}$$

$$\begin{array}{l}
p\wedge\neg q \to r \ , r\to d \ , \neg(q\vee d) \\
\hline
\therefore \ p\wedge\neg q \to r \ , r\to d \ , \neg q\wedge\neg d \\
\hline
\therefore \ p\wedge\neg q \to r \ , r\to d \ , \neg q \ , \neg d \\
\hline
\therefore \quad p\wedge\neg q \to r \ , \neg r \ , \neg q \\
\hline
\therefore \quad \neg(p\wedge\neg q) \ \ , \neg q \\
\hline
\therefore \quad \neg p\vee q \ \ , \neg q \\
\hline
\therefore \quad \neg p
\end{array}$$

الإفادة أو التقرير المفتوح The predicate

لنأخذ مثلا الجملة " x عدد صحيح زوجي " ونلاحظ أن هذه الجملة الخبرية لا يمكن الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة إلا بعد إعطاء المتغير x قيمة معينة من مجموعة عددية D وبالتالي كلما أعطينا قيمة معينة للمتغير x نحصل على عبارة منطقية .

تعريف : نسمي إفادة أو تقرير مفتوح كل جملة خبرية تتضمن متغيراً أو عدد من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ تأخذ قيمها من مجموعة D تسمى المجموعة الشاملة للإفادة بحيث أنه من أجل كل قيمة للمتغيرات نحصل على عبارة منطقية .

نرمز للإفادة بالرمز $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ وتكون $p(a_1, a_2, ..., a_n)$ عبارة منطقية حيث $a_1, a_2, ..., a_n$ قيم للمتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ من المجموعة الشاملة D .

مثال : لتكن الإفادة $p(x, y)$ التي تمثل الجملة الخبرية " $2x + 3y = 7$ " والمجموعة الشاملة $D = N$.

نلاحظ أن هذه الإفادة تتحول إلى عبارة منطقية كلما أعطينا قيماً للمتغيرين x, y

مثلاً : $p(2,3)$ هي عبارة منطقية تمثل الجملة " $4 + 9 = 7$ " ويمكن الحكم عليها مباشرة أنها جملة منطقية خاطئة ,

بينما $p(2,1)$ هي جملة منطقية تمثل " $4 + 3 = 7$ " وهي جملة منطقية يمكن الحكم عليها بأنها صحيحة .

تعريف : لتكن $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ إفادة مجموعتها الشاملة D . نعرف مجموعة الصواب للإفادة $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ بأنها مجموعة القيم من المجموعة الشاملة D التي تجعل الإفادة صائبة ونرمز لمجموعة الصواب هذه بالرمز T_P .

$$T_P = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in D \;;\; P(a_1, a_2, ..., a_n) \equiv t\}$$

في المثال السابق لدينا $T_P = \{ (2,1)\}$

التقرير الشمولي والتقرير الوجودي

تعريف : نسمي الرمز $\forall$ بالرمز الشمولي أو المكمم الشمولي Universal Quantifier

نسمي الرمز $\exists$ بالرمز الوجودي أو المكمم الوجودي Existential Quantifier

تعريف : لتكن $p(x)$ إفادة مجموعتها الشاملة D . نسمي العبارة $\forall x \in D, p(x)$ تقريراً شمولياً ونعبر عنه لغوياً بالجملة " من أجل كل عنصر x من المجموعة الشاملة D فإن الإفادة $p(x)$ تصبح عبارة منطقية صائبة .

من الواضح أن التقرير الشمولي $\forall x \in D, p(x)$ يكون صائباً إذا وفقط إذا كان من أجل كل قيمة x من المجموعة الشاملة D فإن $p(x)$ تكون صائبة , أي أن $T_P = D$.

ويمكن تعميم التقرير الشمولي على عدد من المتغيرات وبحيث لكل متغير مجموعة شاملة ما بالشكل :

$$\forall x_1 \in D_1, \forall x_2 \in D_2, ..., \forall x_n \in D_n \; p(x_1, x_2, ..., x_n)$$

أو بالشكل : $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_1 \times D_2 . . . \times D_n \; p(x_1, x_2, ..., x_n)$

تعريف : لتكن $p(x)$ إفادة مجموعتها الشاملة D . نسمي العبارة $\exists x \in D, p(x)$ تقريراً وجودياً ونعبر عنه لغوياً بالجملة " يوجد عنصر x من المجموعة الشاملة D بحيث أن الإفادة $p(x)$ هي صائبة .

من الواضح أن التقرير الوجودي $\forall x \in D, p(x)$ يكون صائباً إذا وفقط إذا وجدت قيمة x من المجموعة الشاملة D بحيث $p(x)$ تكون صائبة , أي أن $T_P \neq \emptyset$.

ويمكن تعميم التقرير الشمولي على عدد من المتغيرات وبحيث لكل متغير مجموعة شاملة ما بالشكل :

$$\exists x_1 \in D_1, \exists\, x_2 \in D_2, . . . , \exists x_n \in D_n\ p(x_1, x_2, . . . , x_n)$$

أو بالشكل : $\exists (x_1, x_2, . . . , x_n) \in D_1 \times D_2 . . . \times D_n\ p(x_1, x_2, . . . , x_n)$

أمثلة :