$(A \to B) \land \neg B \Longrightarrow \neg A$ (1

$$(A \to B) \land \neg B \to \neg A \equiv (\neg A \lor B) \land \neg B \to \neg A$$
$$\equiv \neg((\neg A \lor B) \land \neg B)) \lor \neg A$$
$$\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B) \lor \neg A$$
$$\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor B \lor \neg A$$
$$\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor (\neg A \lor B) \equiv t$$

$B \Longrightarrow A \to B$ (2

$$B \to (A \to B) \equiv \neg B \lor (\neg A \lor B)$$
$$\equiv (\neg B \lor B) \lor \neg A$$
$$\equiv t \lor \neg A \equiv t$$

$\neg A \Longrightarrow A \to B$ (3

$$\neg A \to (A \to B) \equiv \neg(\neg A) \lor (\neg A \lor B)$$
$$\equiv A \lor (\neg A \lor B)$$
$$\equiv (A \lor \neg A) \lor B \equiv t \lor B \equiv t$$

$(A \to B) \land (B \to D) \Longrightarrow A \to D$ (4

$$(A \to B) \land (B \to D) \to (A \to D) \equiv$$
$$\equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor D) \to (\neg A \lor D)$$
$$\equiv \neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor D)) \lor (\neg A \lor D)$$
$$\equiv \neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor D) \lor (\neg A \lor D)$$
$$\equiv (A \land \neg B) \lor (B \land \neg D) \lor (\neg A \lor D)$$
$$\equiv ((A \land \neg B) \lor \neg A) \lor ((B \land \neg D) \lor D)$$
$$\equiv ((A \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D) \land (\neg D \lor D))$$
$$\equiv (t \land (\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D) \land t)$$
$$\equiv ((\neg B \lor \neg A)) \lor ((B \lor D))$$
$$\equiv (\neg B \lor B) \lor (\neg A \lor D)$$
$$\equiv t \lor (\neg A \lor D) \equiv t$$

$(A\oplus B) \wedge B \Longrightarrow \neg A$ و $(A\oplus B) \wedge A \Longrightarrow \neg B$ (5

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B) \wedge A \to \neg B &\equiv ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge A \to \neg B \\
&\equiv A \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv c \vee (A \wedge \neg B)) \to \neg B \\
&\equiv (A \wedge \neg B) \to \neg B \\
&\equiv \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \\
&\equiv \neg A \vee B \vee \neg B \\
&\equiv \neg A \vee t \equiv t
\end{aligned}
$$

$(A\oplus B) \wedge \neg B \Longrightarrow A$ و $(A\oplus B) \wedge \neg A \Longrightarrow B$ (6

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B) \wedge \neg A \to B &\equiv ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge \neg A \to B \\
&\equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \to B \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \neg A \to B \\
&\equiv (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \to B \\
&\equiv c \vee (B \wedge \neg A)) \to B \\
&\equiv (B \wedge \neg A) \to B \\
&\equiv \neg(B \wedge \neg A) \vee B \\
&\equiv \neg B \vee A \vee B \\
&\equiv (\neg B \vee B) \vee A \\
&\equiv t \vee A \equiv t
\end{aligned}
$$

المحاكمات المنطقية

تعريف : نسمي العبارة $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ محاكمة منطقية حيث تسمى العبارات المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مقدمات وتسمى العبارة المنطقية B نتيجة .

نرمز للمحاكمة المنطقية بالشكل

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore \quad B \end{array}$$ بالشكل أو $$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{\therefore \quad B}$$

ملاحظة : إذا كانت إحدى العبارات المنطقية A_i خاطئة فإن العبارة المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكون خاطئة وبالتالي فإن العبارة المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n \rightarrow B$ صائبة دائماً والمحاكمة المنطقية $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ صحيحة دون معرفة صحة أو خطأ العبارة المنطقية B ولذلك عند دراسة المحاكمة المنطقية نفرض دائماً أن المقدمة $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ صحيحة وهذا يقتضي أن تكون جميع العبارات المنطقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ صائبة .

ولدينا القواعد الآتية عند دراسة المحاكمة المنطقية :

1) إذا حصلنا خلال دراستنا للمحاكمة المنطقية $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{\therefore \quad B}$ على تناقض من الشكل $A \wedge \neg A$ فإن المحكمة المنطقية تكون خاطئة .

2) عند دراستنا للمحاكمة المنطقية قد لا نستخدم بعض المقدمات .

3) عند دراستنا للمحاكمة المنطقية قد نستخدم بعض المقدمات أكثر من مرة .

قواعد المحاكمات

قواعد المحاكمات تأتي من تطبيق الاقتضاءات التي درسناها :

1) $$\frac{A}{\therefore \quad A}$$

2) $$\frac{A}{\therefore \quad A \vee B}$$ و $$\frac{B}{\therefore \quad A \vee B}$$

3) $\dfrac{A \wedge B}{\therefore \quad A}$ و $\dfrac{A \wedge B}{\therefore \quad B}$

4) $\dfrac{A \vee B \,,\; \neg A}{\therefore \quad B}$ و $\dfrac{A \vee B \,,\; \neg B}{\therefore \quad A}$

5) $\dfrac{A \,,\; A \rightarrow B}{\therefore \quad B}$

6) $\dfrac{A \rightarrow B \,,\neg B}{\therefore \quad \neg A}$

7) $\dfrac{B}{\therefore \quad A \rightarrow B}$

8) $\dfrac{\neg A}{\therefore \quad A \rightarrow B}$

9) $\dfrac{A \rightarrow B \,,\; B \rightarrow D}{\therefore \quad A \rightarrow D}$

10) $\dfrac{A \oplus B \,,\; A}{\therefore \quad \neg B}$ و $\dfrac{A \oplus B \,,\; B}{\therefore \quad \neg A}$

11) $\dfrac{A \oplus B \,,\neg A}{\therefore \quad B}$ و $\dfrac{A \oplus B \,,\; \neg A}{\therefore \quad B}$

يمكن إضافة بعض قواعد الاستنتاج غير الأساسية

(12 $\dfrac{A \vee B \to D}{\therefore\ A \to D}$ و $\dfrac{A \vee B \to D}{\therefore\ B \to D}$

لنبرهن مثلاً أن $A \vee B \to D \Longrightarrow A \to D$:

$$
\begin{aligned}
(A \vee B \to D) \to (A \to D) &\equiv \neg(A \vee B) \vee D \to (\neg A \vee D) \\
&\equiv \neg(\neg(A \vee B) \vee D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D) \vee (\neg A \vee D) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee D) \vee (\neg A \vee D) \vee (B \wedge \neg D) \\
&\equiv t \vee (B \wedge \neg D) \ \equiv t
\end{aligned}
$$

(13 $\dfrac{A \to B \wedge D}{\therefore\ A \to B}$ و $\dfrac{A \to B \wedge D}{\therefore\ A \to D}$

لنبرهن مثلاً أن $A \to B \wedge D \Longrightarrow A \to B$

$$
\begin{aligned}
(A \to B \wedge D) \to (A \to B) &\equiv \neg(A \to B \wedge D) \vee (A \to B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee (B \wedge D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee D)) \vee (\neg A \vee B) \\
&\equiv \neg(\neg A \vee B)) \vee (\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee D) \\
&\equiv t \vee \neg(\neg A \vee D) \equiv t
\end{aligned}
$$

مثال : اختبر صحة المحاكمة الآتية

$$\dfrac{p\wedge\neg q \to r\ ,r\to d\ ,\neg(q\vee d)}{\therefore\quad \neg p}$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{p\wedge\neg q \to r\ ,r\to d\ ,\neg(q\vee d)} \\
\therefore\ p\wedge\neg q \to r\ ,r\to d\ ,\neg q\wedge\neg d \\
\hline
\therefore\ p\wedge\neg q \to r\ ,r\to d\ ,\neg q\ ,\neg d \\
\hline
\therefore\quad p\wedge\neg q \to r\ ,\neg r\ ,\neg q \\
\hline
\therefore\quad \neg(p\wedge\neg q)\ ,\neg q \\
\hline
\therefore\quad \neg p\vee q\ ,\neg q \\
\hline
\therefore\quad \neg p
\end{array}
$$