بيانيات حاسوبية

د. غيث ابراهيم بلال

المحاضرة الثالثة

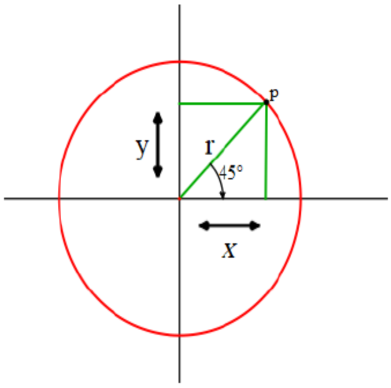
تحويل المسح لدائرة

الدائرة هي مجموعة من نقاط المستوي التي تبعد بعداً وحداً وثابتاً عن نقطة تسمى المركز.

ولرسم دائرة نحتاج إلى معرفة إحداثيات مركزها ومعرفة نصف قطرها بحيث توجد طريقتان لتعريف دائرة يقع مركزها عند نقطة الأصل رياضياً.

1. تعطى معادلة الدائرة بالشكل: $y^2 = r^2 - x^2$ $\qquad P\left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)$

نصف القطر R :

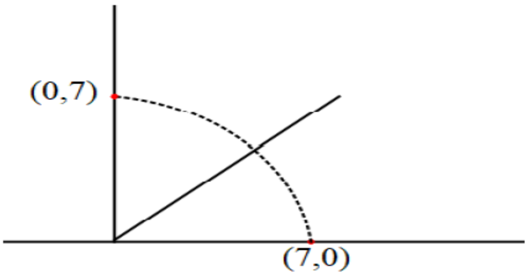


كل إحداثي x في الربع الأول يحدد بزيادة x من R إلى 0، وفي القطعة p_1 الواقعة في النصف الأول يكون x هي $\frac{R}{\sqrt{2}}$

$$x = R\cos\theta = R\cos 45^\circ = R/\sqrt{2}$$

يحدد كل إحداثي y بحساب $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ في كل خطوة عند تحديد x

هذه الطريقة ليست فعالة بسبب كثرة العمليات من التربيع والطرح والجذر مما يساعد في ظهور فراغات كبيرة بين النقاط المرسومة تزداد مع اقتراب قيم x من R.

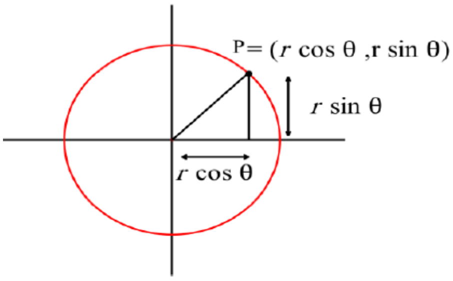


2. الطريقة الثانية لتعريف دائرة تستخدم المعادلات المثلثية:

$$y = R\sin\theta \quad و \quad x = R\cos\theta$$

وعندما نجعل θ تأخذ القيم من 0° إلى 90° لرسم

الدائرة في الربع الأول



ونرسم الأرباع الباقية بالتناظر وعلى الرغم من أن

الإحداثيات القطبية تقدم بعداً متساوياً للنقاط إلا أنها

لا تزال تعاني من مشكلة الزمن المهدور على الحسابات الرياضية.

من أجل أي من طرائق رسم الدائرة السابقة فإننا نستطيع تقليل كمية الحسابات عن طريق الأخذ بالاعتبار تناظر نقاط الدائرة.

ان شكل الدائرة متشابه في كل ربع لذلك إذا رسمنا مواضع المنحني في أول ربع من المستوي oxy نستطيع أن نولد مقطع الدائرة في الربع الثاني من المستوي بملاحظة تناظر الربعين بالنسبة للمحور oy كذلك الأرباع في المقاطع الثالث والرابع بأخذ التناظر بالنسبة للمحور ox .

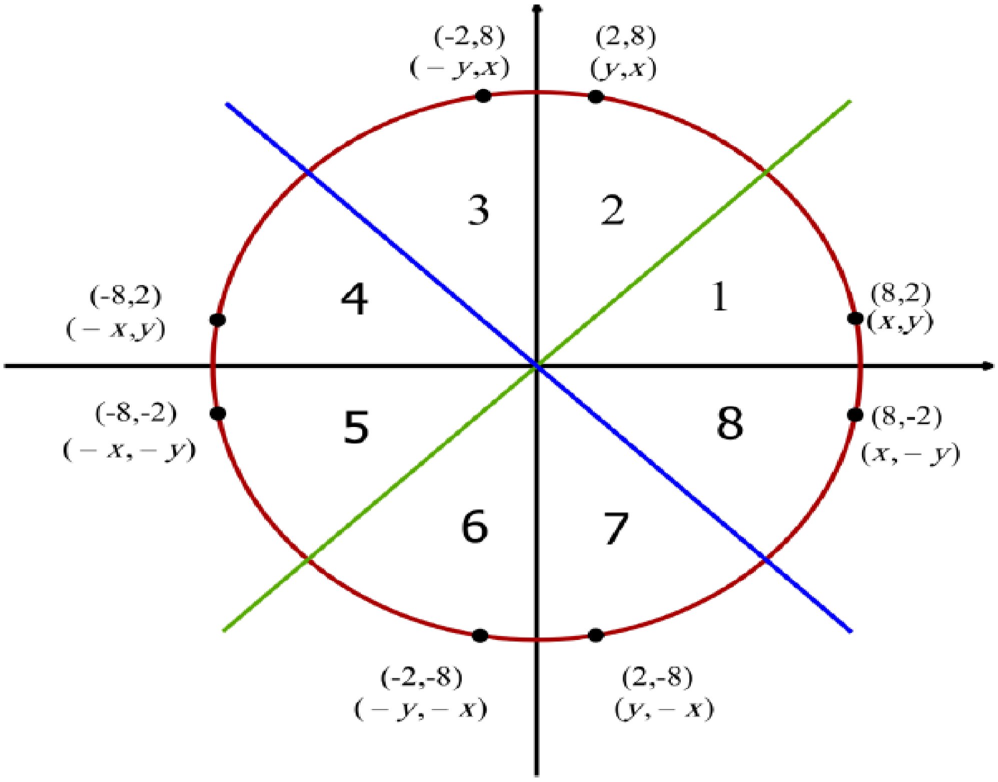
يوجد أيضا تناظر بالنسبة للأثمان حيث أن كل دائرة تقسم إلى ثمانية أقواس متطابقة وكل ربع دائرة يقسم إلى ثمنين متناظرين بالنسبة لمحور ال 45 درجة ونوضح ذلك بالجدول التالي :

الثمن الأول يناظر الثمن الثامن وفقا للمحور x.

الثمن الثاني يناظر الثمن الثالث وفقا للمحور y.

الثمن الرابع يناظر المحور الخامس وفقا للمحور x.

الثمن السادس يناظر الثمن السابع وفقا للمحور y.



$p_1 = (x, y)$	$p_5 = (-x, -y)$
$p_2 = (y, x)$	$p_6 = (-y, -x)$
$p_3 = (-y, x)$	$p_7 = (y, -x)$
$p_4 = (-x, y)$	$p_8 = (x, -y)$

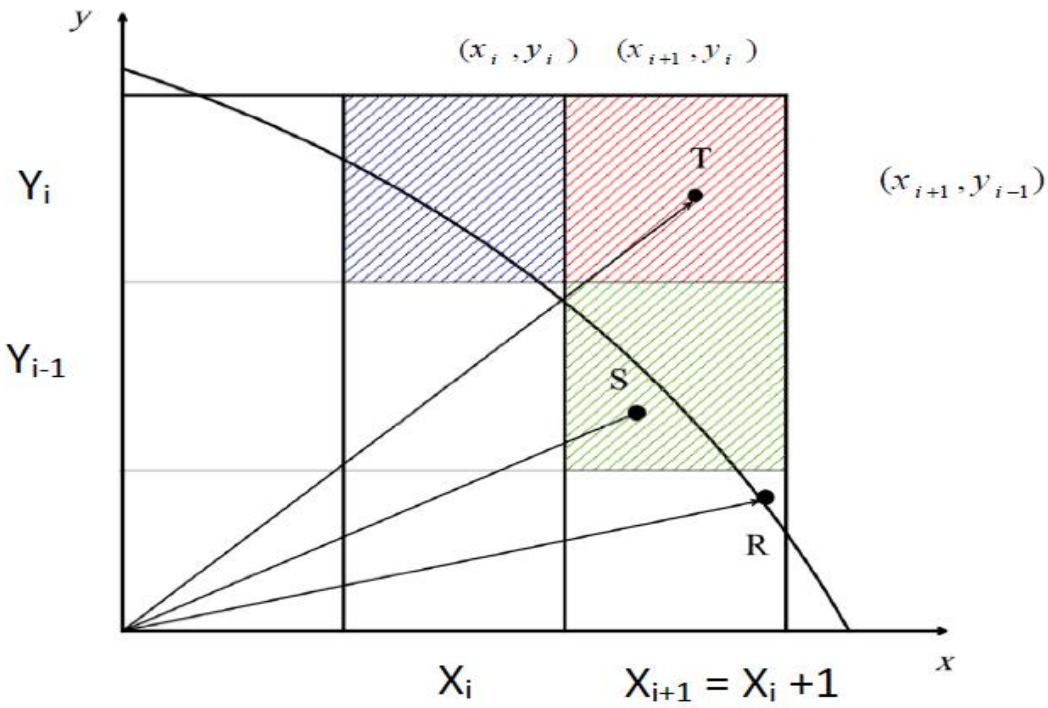
خوارزمية الدائرة لبريزنهام :

تعمل هذه الطريقة بالشكل التالي :

إذا استخدم التماثل أو التناظر الثماني لتوليد الدائرة ينبغي فقط توليد النقاط من خلال زاوية 45° (المحور الذي يصنع زاوية 45° هو المنصف الأول) وإذا ولّدت النقاط من 90° إلى 45° تحدث الانتقالات في الاتجاه x+ والاتجاه y− فقط .

التقريب الأفضل للدائرة الصحيحة يمكن وصفه بالبكسلات في خطوط المسح التي تقع عند أقرب مسافة من الدائرة الصحيحة ويمكن القيام بأحد الأمرين.

الانتقال في الاتجاه x واحد واحد والانتقال باتجاه y− واحد واحد



نفرض أن (x_i , y_i) هي احداثيات اخر بكسل محول عند البدء بالخطوة i
لتكن المسافة من نقطة الأصل إلى البكسل T هي D(T) والمسافة إلى البكسل
S هي D(S) من نقطة الأصل وبما أن احداثيات T هي $(x_i +1, y_i +1)$
واحداثيات s هي $(x_i +1, y_i -1)$ وبالتالي نستطيع ان نكتب:

$$D(S) = (X_i +1)^2 + (y_i -1)^2 - R^2$$
$$D(T) = (X_i +1)^2 + (y_i)^2 - R^2$$

$$T(x_{i+1}, y_i) = (x_i +1, y_i)$$
$$S(x_{i+1}, y_{i-1}) = (x_i +1, y_i -1)$$

احداثيات كل من T و S

وبما أن D(T) المسافة موجبة دوما (T تقع خارج الدائرة الصحيحة) و D(S) سالبة دوما (S تقع داخل الدائرة الصحيحة)

بالإمكان تعريف معامل القرار d_i كما يلي:

$$d_i = D(T) + D(S)$$
$$d_i = (x_i +1)^2 + y_i^2 - R^2 + (x_i +1)^2 + (y_i -1)^2 - R^2$$
$$d_i = 2(x_i +1)^2 + y_i^2 + (y_i -1)^2 - 2R^2$$

عندما $d_i < 0$ أي $|D(T)| < |D(S)|$ والبكسل T هو المأخوذ وعندما $d_i \geq 0$ نجد أن $|D(T)| \geq |D(S)|$ والبكسل S هو المأخوذ.

وبالتالي معامل القرار d_{i+1} يعطى بالشكل التالي:

$$d_{i+1} = 2(x_{i+1} +1)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1} -1)^2 - 2R^2$$

وبالتالي:

$$d_{i+1}-d_i=2(x_{i+1}+1)^2+y_{i+1}^2+(y_{i+1}-1)^2-2(x_i+1)^2-y_i^2-(y_i-1)^2$$

وبما أن $x_{i+1}=x_i+1$ نبدل فنجد:

$$d_{i+1}=d_i+4x_i+2(y_{i+1}^2-y_i^2)-2(y_{i+1}-y_i)+6$$

إذا كان T هو البكسل المأخوذ أي $(d_i<0)$ فإن $y_{i+1}=y_i$ وبالتالي:

$$d_{i+1}=d_i+4x_i+6$$

إذا كان S هو البكسل المأخوذ (أي $d_i \geq 0$) فإن $y_{i+1}=y_i-1$ وبالتالي:

$$d_{i+1}=d_i+4x_i+2((y_i-1)^2-y_i^2)-2(y_i-1-y_i)+6$$

$$d_{i+1}=d_i+4x_i+2y_i^2-4y_i+2-2y_i^2+2+6$$

$$d_{i+1}=d_i+4(x_i-y_i)+10$$

اذن

$$d_{i+1}=\begin{cases} d_i+4x_i+6 & if \ \ d_i<0 \\ d_i+4(x_i-y_i)+10 & if \ \ d_i \geq 0 \end{cases}$$

و أخيراً نحسب d_1 الابتدائية لأجل الانطلاق بحساب الصيغة التكرارية ويكون احداثيات هذا البكسل $(0,R)$ (نبدل في d_i):

$$d_1=2(0+1)^2+R^2+(R-1)^2-2R^2=3-2R$$

تكتب خوارزمية بريزنهام لتوليد أو لمسح دائرة نصف قطرها R (في الثمن الثاني 90° إلى 45°) بالشكل التالي:

1. ننطلق من النقطة الأولى $(0,R)$ ونعتبرها البكسل الأول.
2. نحسب $d_1 = 3 - 2R$ الابتدائي (معامل القرار الابتدائي).
3. نكرر هذه الخطوات طالما أن $(x \le y)$:
   a. إذا كانت d المحسوبة سابقاً أصغر من الصفر $d < 0$:
   نزيد x واحد $x_i = x_{i+1}$ وتبقى $y = y_i$ ونحسب
   $$d_{i+1} = d_i + 4x_i + 6$$
   b. و إلا: ننقص y واحد ونزيد x واحد , $x_i = x_i + 1$ و $y_i = y_i - 1$ ونحسب $d_{i+1} = d_i + 4(x_i - y_i) + 10$

ملاحظة مهمة: اذا كان مركز الدائرة ليس بمبدأ الاحداثيات (0,0) وكان له الاحداثيات التالية (x_c , y_c) وبالتالي عند كل نقطة تحسب بالخوارزمية نجري انسحاباً لهذه النقطة بالشكل التالي:

$$x = x + x_c \qquad y = y + y_c$$